УДК 621.391 : 62-50

А. Г. СЕНИН

(*Новосибирск*)

# О КОРРЕКТНОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ ОЦЕНОК

Оптимальная линейная обработки стационарного случайного процесса $x(t)$ сводится к определению такой весовой функции $k(\tau)$, при которой оценка полезного сигнала

$$h^*(t) = \int_0^\infty x(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau \tag{1}$$

имеет минимальную дисперсию

$$\sigma^2_{\min} = \overline{[h(t) - h^*(t)]^2}. \tag{2}$$

Как известно [1], искомая функция определяется интегральным уравнением вида

$$R_{hx}(\tau) = \int_0^\infty R_x(\tau - \Theta)\,k(\Theta)\,d\Theta; \quad \tau \geqslant 0, \tag{3}$$

где $R_{hx}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция между желаемым процессом $h(t)$ и входным $x(t)$; $R_x(\tau)$ — корреляционная функция входного сигнала $x(t)$.

Поскольку уравнение (3) является некорректным, а экспериментальные исходные данные всегда определяются с погрешностями, импульсная функция для одних и тех же процессов может отличаться сколь угодно сильно. Естественно выяснить, не приводит ли такая неустойчивость решения уравнения (3) к тому, что и оценки будут сколь угодно далеки от оптимальных. В [2] рассмотрен пример, когда оптимальная оценка математического ожидания процесса оказывается некорректной, что исключает возможность использования такой обработки.

В предлагаемом сообщении анализируется практически важный случай задачи упреждения, когда оптимальная обработка приводит к некорректной оценке сигнала.

Пусть спектральная плотность входного сигнала $x(t)$ имеет вид

$$S_x(\omega) = \frac{1}{1+\omega^4}. \tag{4}$$

Оптимальное упреждение на время $t_0$ реализуется для такого процесса с помощью фильтра, частотная характеристика которого

$$\Phi(\omega) = e^{-\frac{t_0}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{t_0}{\sqrt{2}} + \sin\frac{t_0}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\,e^{-\frac{t_0}{\sqrt{2}}}\sin\frac{t_0}{\sqrt{2}}\,j\omega. \tag{5}$$

Очевидно, импульсная функция упредителя содержит $\delta$-функцию и ее производную. Обозначив

$$b_0 = e^{-\frac{t_0}{\sqrt{2}}}\left(\sin\frac{t_0}{\sqrt{2}} + \cos\frac{t_0}{\sqrt{2}}\right), \tag{6}$$

$$b_1 = \sqrt{2}\,e^{-\frac{t_0}{\sqrt{2}}}\sin\frac{t_0}{\sqrt{2}}, \tag{7}$$

соотношение (5) можно записать иначе:

$$\Phi(\omega) = b_0 + b_1 j\omega. \tag{8}$$

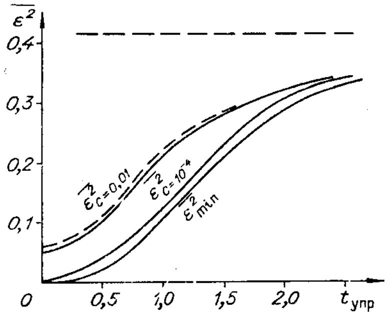
Ошибка экстраполирования при этом окажется равной

$$\overline{\varepsilon^2_{\min}} = 0{,}354\left(1 - b_0^2 - b_1^2\right). \tag{9}$$

Если допустить в спектральной плотности (4) существование неучтенной составляющей помехи «белого» шума с весьма малой интенсивностью $c>0$, тогда оптимальный предсказывающий фильтр будет определяться частотной характеристикой

$$\Phi^*(\omega) = \frac{b_0 + b_1 j\omega}{1 + 1{,}41\sqrt[4]{c}\, j\omega - \sqrt{c}\,\omega^2}. \tag{10}$$

Как видим, в последнем случае оптимальный фильтр не содержит усилительных и дифференцирующих звеньев, что повышает его помехоустойчивость. Сравним влияние характера исходного сигнала $x(t)$ на качество экстраполяции.




На рисунке отражены зависимости ошибки упреждения от времени экстраполяции процесса $x(t)$ со спектральной плотностью (4). Как и следовало ожидать, минимальная ошибка упреждения наблюдается для фильтра с частотной характеристикой (8). Несущественно увеличивается средний квадрат ошибки для фильтра (10), рассчитанного из условия возможного наличия помехи белого шума с интенсивностью $c=10^{-4}$; бóльшая ошибка будет иметь место для процесса со спектральной плотностью (4), если фильтр рассчитан с учетом помехи, для которой $c=0{,}01$. Заметим, что для такого фильтра действительное наличие составляющей белого шума мало меняет значение ошибок (штриховая линия).

Совсем иная картина проявляется, если используется фильтр с характеристикой (8) в условиях дополнительной недифференцируемой помехи сколь угодно малой интенсивности. При этом очевидно, что дисперсия сигнала на выходе такого фильтра будет бесконечной, а оценка сигнала некорректной (верхняя штриховая линия).

Для того чтобы избежать некорректных оценок в реальной ситуации, достаточно исходную корреляционную функцию процесса аппроксимировать недифференцируемой функцией, что исключает дифференцирование процесса, либо ввести дополнительную составляющую помехи белого шума с весьма малой интенсивностью.

В последнем случае импульсная функция фильтра не будет содержать не только производных, но и самой $\delta$-функции. Введение составляющей белого шума равноценно регуляризации решения интегрального уравнения (3) по А. Н. Тихонову [3].

## ЛИТЕРАТУРА


1. В. В. Солодовников. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
2. С. Я. Виленкин. О корректности оптимальных оценок математического ожидания случайного эргодического процесса.— Автоматика и телемеханика, 1970, № 9.
3. А. Н. Тихонов. Решение некорректно поставленных задач и метод регуляризации. — Докл. АН СССР, 151, 1963, № 3.



*Поступило в редакцию*
*24 марта 1971 г*


---


УДК 621.317.39



**А. Б. КУНГУРЦЕВ, В. В. СКАЛЕВОЙ**

*(Одесса)*


# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПОСТОЯННОГО СИГНАЛА ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОМЕХИ

В некоторых областях измерительной техники встречается задача определения с высокой точностью кратковременного постоянного сигнала $U_{x0}$ при наличии периодической помехи

$$U_п = \sum_{i=1}^{n} U_{пi} \sin(\omega_i t + \beta_i), \tag{1}$$