

Л. Л. КЛЮЕВ

(Минск)

**АНАЛИЗ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ  
СЛАБЫХ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ,  
РАБОТАЮЩИХ В ШИРОКОМ ДИНАМИЧЕСКОМ ДИАПАЗОНЕ**

При измерении слабых постоянных токов в диапазоне  $10^{-9}$ — $10^{-15}$  А, как правило, эти токи преобразуются в радиосигналы, один из параметров которых, например амплитуда, оказывается функционально связан с измеряемым током. В дальнейшем этот радиосигнал усиливается и по параметру судят о величине тока. Обычно параметр измеряется в условиях действия флюктуационной помехи, что приводит к появлению случайной ошибки. При этом желательно построить измеритель так, чтобы эта ошибка была минимальной.

Минимальное значение ошибки обеспечивается в оптимальных измерителях, поиск структур которых представляет теоретический и практический интерес. Этот поиск неразрывно связан с оценкой и анализом помехоустойчивости как оптимальных структур, так и структур, близких к оптимальным, которые в ряде случаев оказываются более предпочтительными на практике вследствие их лучшей реализуемости, простоты и т. п.

В данной работе поставлена задача поиска структуры измерителя слабых постоянных токов, помехоустойчивость которой является потенциальной по отношению к «белому» шуму и которая обеспечивает измерение в широком динамическом диапазоне, а также задача анализа помехоустойчивости этой структуры и некоторых неоптимальных структур.

**Структура оптимального измерения. Анализ помехоустойчивости измерителя, работающего в условиях белого шума.** Пусть  $y(t)$  — смесь полезного сигнала и белого нормального шума:

$$y(t) = U_c U(t) + U_{\text{ш}}(t),$$

где  $U_c$  — амплитуда радиосигнала, подлежащая измерению;  $U(t)$  — нормированный сигнал с амплитудой, равной единице;  $U_{\text{ш}}(t)$  — напряжение шума.

Измеритель производит анализ смеси  $y(t)$  в течение времени  $T$  и на основании этого анализа выдает оценку измеряемой амплитуды  $U_c^*$ . Из возможных структур измерителей только оптимальные структуры обеспечивают оптимальные оценки. В случае использования критерия минимума среднего риска оптимальной оценкой амплитуды является оценка

по центру тяжести апостериорного распределения, вычисленного по реализации  $y(t)$ .

Однако оценка по центру тяжести апостериорного распределения трудно реализуема на практике и поэтому не находит широкого применения. Более предпочтительными являются: оценка по максимуму апостериорного распределения и оценка по максимуму функции правдоподобия, которые при большом отношении сигнал/шум эквивалентны оценке по центру тяжести и являются несмещенными и асимптотически эффективными. Вычисление оценок связано с вычислением вероятности параметра (в данном случае амплитуды) — функции правдоподобия  $P(y/U_c)$ .

В литературе подробно описаны способы вычисления функций правдоподобия как для сигнала известного точно, так и для сигнала со случайными параметрами.

В данной работе мы ограничимся случаем (сигнал известен точно), который применительно к технике измерения слабых токов представляет наибольший практический интерес. Функция правдоподобия при этом равна [1]

$$P(y/U_c) = e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - U_c U(t)]^2 dt}, \quad (1)$$

где  $N_0$  — мощность шума, приходящаяся на единицу полосы. Оценка измеряемого параметра находится из уравнения

$$\frac{d}{dU_c} [P(y/U_c)]$$

и равна

$$U_c^* = \frac{\int_0^T y(t) U(t) dt}{\int_0^T U^2(t) dt}. \quad (2a)$$

Относительная дисперсия оценки:

$$\frac{\sigma^2}{U_c^2} = \frac{N_0}{2E}, \quad (2б)$$

где  $E$  — энергия сигнала.

Структура оптимального устройства определяется выражением (2а). Устройство вычисляет отношение двух интегралов: взаимно корреляционного интеграла и интеграла, численно равного энергии сигнала единичной амплитуды.

Блок-схема измерителя приведена на рис. 1. В состав блок-схемы входят: коррелятор, генератор опорного напряжения и устройство регистрации амплитуды (УР). Недостатком измерителя, работающего по алгоритму (2а), является узкий диапазон измеряемых значений  $U_c$ . Поскольку операции перемножения и интегрирования осуществляются на выходе усилителя, то по существу этот диапазон определяется линейным участком амплитудной характеристики усилителя. Поэтому желательно использовать такие структуры измерителей, которые обеспечивали бы высокую помехоустойчивость и не имели указанного выше недостатка. К числу таких измерителей следует отнести измерители, работающие в соответствии с уравнением

$$\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - U_c U(t)]^2 dt = \min. \quad (3)$$

При выполнении условия (3) будет обеспечиваться максимум выраже-

Рис. 1.

Рис. 2.

устройство возведения в квадрат (квадратор) Кв, интегратор и индикатор нуля (НО). Схема рис. 2 представляет большой практический интерес, так как она обладает широким диапазоном измеряемых значений  $U_c$ , поскольку усилению подлежит не величина  $y(t)$ , а разность  $y(t) - U_c U(t)$ , величина которой в момент отсчета амплитуды может быть весьма малой. В процессе измерения величина  $y(t)$  как бы компенсируется величиной  $U_c^* U(t)$ , и по этой причине можно считать, что в блок-схеме рис. 2 используется компенсационный метод измерения.

Вычислим относительную дисперсию оценки амплитуды. Пусть

$$\int_0^T [y(t) - U_c U(t)]^2 dt = \varepsilon; \quad \int_0^T [y(t) - U_c U(t) - \Delta U_c U(t)]^2 dt = \gamma,$$

где  $\Delta U_c$  — отклонение амплитуды сигнала от его истинного значения  $U_c$ ;

$$\gamma - \varepsilon = \int_0^T \Delta U_c^2 U^2(t) dt - \int_0^T 2[y(t) - U_c U(t)] \Delta U_c U(t) dt.$$

Найдем значение отклонения  $\Delta U_c$ , при котором  $\gamma - \varepsilon = \min$ . С этой целью вычислим производную  $\frac{d}{d\Delta U_c} (\gamma - \varepsilon)$  и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d}{d\Delta U_c} (\gamma - \varepsilon) = 2\Delta U_c E_0 - 2 \int_0^T U_{ш}(t) U(t) dt = 0,$$

где

$$U_{ш}(t) = y(t) - U_c U(t); \quad E_0 = \int_0^T U^2(t) dt.$$

Из полученного уравнения находим

$$\Delta U_c = \frac{1}{E_0} \int_0^T U_{ш}(t) U(t) dt.$$

Среднее значение отклонения  $\overline{\Delta U_c} = 0$ , а дисперсия

$$\sigma_{\Delta U_c}^2 = \frac{1}{E_0^2} \int_0^T \int_0^T U(t) U(t') \overline{U_{ш}(t) U_{ш}(t')} dt dt',$$

где  $\overline{U_{ш}(t) U_{ш}(t')} = k(t, t')$  — корреляционная функция шума. Для белого шума

$$k(t, t') = \frac{N_0}{2} \delta(t - t'),$$

$$\frac{\overline{U_c^2}}{U_c^2} = \frac{N_0}{2E}. \quad (4)$$

Среднее значение минимальной разности на выходе измерителя равно

$$(\overline{\gamma - \varepsilon})_{\min} = \sigma_{\Delta U_c}^2 E_0,$$

т. е. дисперсия оценки может быть определена по минимальному среднему значению разности.

Дисперсия максимальной разности также выражается через дисперсию оценки. Средний квадрат разности:

$$\begin{aligned} \overline{(\gamma - \varepsilon)_{\min}^2} &= \overline{\left[ \int_0^T \Delta U_c^2 U^2(t) dt - 2 \int_0^T U_{\text{ш}}(t) \Delta U_c U(t) dt \right]^2} = \sigma_{\Delta U_c}^4 + \\ &+ 4 \int_0^T \int_0^T \overline{\Delta U_c^2 U(t) U(t')} \overline{U_{\text{ш}}(t) U_{\text{ш}}(t')} dt dt'. \end{aligned}$$

Дисперсия разности:

$$\sigma_p^2 = 4 \int_0^T \int_0^T \overline{\Delta U_c^2 U(t) U(t')} \overline{U_{\text{ш}}(t) U_{\text{ш}}(t')} dt dt' = 4 \sigma_{\Delta U_c}^4 E_0^2.$$

Дисперсия оценки:

$$\sigma_{\Delta U_c}^2 = \frac{\sigma_p}{2E_0}.$$

Относительная дисперсия оценки:

$$\frac{\sigma_{\Delta U_c}^2}{U_c^2} = \frac{\sigma_p}{2E}.$$

Другую структуру оптимального измерителя, работающего в широком амплитудном диапазоне, можно также найти, если привести уравнение (2а) к виду

$$\int_0^T [y(t) - U_c^* U(t)] U(t) dt = 0.$$

Структура, соответствующая полученному уравнению, приведена на рис. 3. В состав блок-схемы входят: вычитающее устройство, перемножители, интегратор, генератор масштаба (ГМ)  $U_c^*$ , генератор единичного сигнала (ГЕС)  $U(t)$ . В отличие от измерителя, (см. рис. 2) измеритель, блок-схема которого дана на рис. 3, обеспечивает автоматическое слежение за изменением  $U_c$  и поэтому может быть рекомендован для применения в следящих измерителях слабых токов. Оценка амплитуды в устройстве рис. 3 является несмещенной, а дисперсия оценки равна  $N_0/2E_0$ . Схема рис. 3 может быть видоизменена включением согласованного фильтра вместо коррелятора (перемножителя и интегратора).

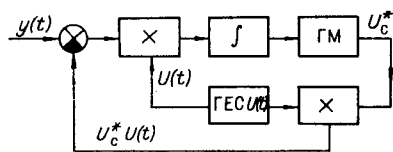


Рис. 3.

**Анализ помехоустойчивости измерителей, структуры которых отличаются от оптимальных.** На основе блок-схем рис. 2 и 3 можно построить ряд интересных для практических применений устройств. Например, в ряде случаев оказывается необходимым заменить интегратор сумматором, квадратор перемножителем, а перемножитель сумматором по модулю два или схемой совпадений.

Получающиеся при этом устройства относительно несложны и реализуются на элементах цифровой вычислительной техники. К числу таких устройств относится устройство, описанное в [3]. Помехоустойчивость этих устройств представляет самостоятельный интерес и в данной работе не рассматривается.

В ряде случаев полезно использовать очень простую схему измерителя, показанную на рис. 4. Она может быть применена в измерителях, где в качестве преобразователя ток — напряжение используется контур ударного возбуждения.

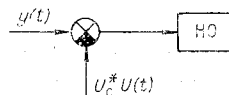


Рис. 4.

Измерение амплитуды с помощью устройства рис. 4 осуществляется так же, как и при использовании схемы рис. 2. Величина  $U_c^* U(t)$  подбирается так, чтобы на выходе измерителя обеспечивался минимум разности. Отсчет амплитуды производится в момент выполнения равенства

$$y(t) - U_c^* U(t) = \min.$$

Величина разности определяется уровнем шума, поэтому

$$y(t) - U_c^* U(t) = c U_{\text{ш}}(t),$$

где  $c$  — некоторое постоянное положительное число. Оценка амплитуды:

$$U_c^* = \frac{y(t) - c U_{\text{ш}}(t)}{U(t)} = U_c + \frac{(1-c) U_{\text{ш}}(t)}{U(t)}.$$

Смещение оценки:

$$\overline{(U_c - U_c^*)} = (c - 1) \frac{\overline{U_{\text{ш}}(t)}}{U(t)} = 0.$$

Дисперсия оценки:

$$\overline{(U_c - U_c^*)^2} = (c - 1)^2 \frac{\overline{U_{\text{ш}}^2(t)}}{U^2(t)}.$$

Относительная дисперсия оценки:

$$\frac{\overline{(U_c - U_c^*)^2}}{U_c^2} = (c - 1)^2 \frac{\overline{U_{\text{ш}}^2(t)}}{U^2(t)}. \quad (5)$$

Оценка (5) соответствует однократным измерениям, которые имеют место при измерении токов  $10^{-15}$ — $10^{-16}$  А.

В случае использования многократных измерений относительная дисперсия оценки уменьшается в  $N$  раз, где  $N$  — число отсчетов, и относительная дисперсия оценки будет равна

$$\frac{\overline{(U_c - U_c^*)^2}}{U_c^2} = \frac{(c - 1)^2}{N} \frac{\overline{U_{\text{ш}}^2(t)}}{U^2(t)}.$$

В рассмотренных выше измерителях широкий амплитудный диапазон обеспечивается при помощи операции вычитания, т. е. обеспечивается схемным решением. В существующем и описанном в [2] измерителе

широкий диапазон достигается за счет применения определенной формы полезного сигнала (экспоненциально убывающего радиопульса). В этом измерителе измерение тока производят путем измерения числа импульсов, превысивших заданный уровень. В отсутствие шума это число составляет

$$n = \frac{f_2}{\delta} \ln \frac{U_c}{U_{\Pi}}, \quad (6)$$

где  $f_2$  — частота высокочастотного заполнения;  $\delta$  — декремент затухания;  $U_c$  — максимальное значение амплитуды радиопульса;  $U_{\Pi}$  — уровень заданного порога;

$$U(t) = e^{-\delta t} \cos \omega_2 t.$$

При наличии шума за счет превышения порога выбросами шума число пересечений отличается от  $n$ , определяемого формулой (6). В результате возникает ошибка в измерении тока. Общее число пересечений в интервале  $T$  в условиях действия шума равно

$$n + \Delta n = \frac{f_2}{\delta} \left[ \ln \frac{U_c}{U_{\Pi}} + \ln \frac{\Delta U_c}{U_{\Pi}} \right] = \frac{f_2}{\delta} \ln \left( \frac{U_c \Delta U_c}{U_{\Pi}^2} \right),$$

где  $\Delta n$  — приращение числа пересечений из-за присутствия шума;  $\Delta U_c$  — максимальное значение амплитуды сигнала, соответствующее числу пересечений  $\Delta n$ .

Регистрируемое значение амплитуды сигнала (оценка максимального значения амплитуды) при этом

$$U_c^* = \frac{U_c \Delta U_c}{U_{\Pi}}.$$

Смещение оценки:

$$\overline{U_c - U_c^*} = U_c \left( 1 - \frac{\Delta U_c}{U_{\Pi}} \right) = U_c \left( 1 - e^{-\frac{\Delta n \delta}{f_2}} \right) \approx -U_c \overline{\Delta n} \frac{\delta}{f_2},$$

где  $\overline{\Delta n}$  — среднее число пересечений уровня  $U_{\Pi}$  из-за присутствия шума.

Оценка является смещенной. Смещение определяется уровнем сигнала  $U_c$ , приращением  $\Delta n$  и величинами  $\delta$  и  $f_2$ . Дисперсия оценки:

$$\sigma_{U_c}^2 = \overline{(U_c - U_c^*)^2} = U_c^2 \overline{\Delta n^2} \left( \frac{\delta}{f_2} \right)^2.$$

Относительная дисперсия оценки:

$$\frac{\sigma_{U_c}^2}{U_c^2} = \overline{\Delta n^2} \left( \frac{\delta}{f_2} \right)^2. \quad (7)$$

Относительная дисперсия оценки определяется средним квадратом приращения числа пересечений  $\overline{\Delta n^2}$  и параметром  $\left( \frac{\delta}{f_2} \right)^2$ , где

$$\overline{\Delta n^2} = (\overline{\Delta n})^2 + \sigma_{\Delta n}^2. \quad (8)$$

Здесь  $(\overline{\Delta n})^2$  — квадрат среднего числа пересечений;  $\sigma_{\Delta n}^2$  — дисперсия числа пересечений.

С учетом (8) выражение (7) можно переписать в виде

$$\frac{\sigma_{U_c}^2}{U_c^2} = \left(\frac{\sigma}{f_2}\right)^2 [(\overline{\Delta n})^2 + \sigma_{\Delta n}^2].$$

Пусть уровень порога  $U_n$  достаточно велик, так что  $\overline{\Delta n} \rightarrow 0$  (отношение сигнал/шум велико). Тогда относительная дисперсия оценки:

$$\frac{\sigma_{U_c}^2}{U_c^2} = \left(\frac{\delta}{f_2}\right)^2 \sigma_{\Delta n}^2. \quad (9)$$

Дисперсия числа пересечений определяется дисперсией длительности радиопульса  $\tau_n$  на уровне  $U_n$ :

$$\sigma_{\Delta n}^2 = \sigma_n^2 f_2^2.$$

Дисперсия  $\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{S^2}$ , где  $\sigma^2$  — дисперсия шума;  $S$  — крутизна огибающей радиопульса в точке пересечения его с порогом  $U_n$ . Крутизна

$$S = \left. \frac{d}{dt} (U_c e^{-\delta t}) \right|_{t=\tau_n} = -\delta U_n.$$

Поэтому

$$\sigma_{\Delta n}^2 = \frac{\sigma^2}{U_n^2} \left(\frac{f_2}{\delta}\right)^2. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим выражение для относительной дисперсии оценки при большом отношении сигнал/шум

$$\frac{\sigma_{U_c}^2}{U_c^2} = \frac{\sigma^2}{U_n^2}. \quad (11)$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе анализа функции правдоподобия для известного сигнала точно найдена оптимальная структура измерителя, обеспечивающая при действии белого шума оптимальную оценку измеряемой амплитуды. Широкий диапазон измеряемой амплитуды обеспечивается за счет вычитания на входе измерителя из смеси сигнала и шума образца сигнала.

Найдена оценка помехоустойчивости для оптимального измерителя с упрощенной структурой и оценка амплитуды измерителей, работающих по методу счета числа пересечений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Гуткин. Теория оптимальных методов радиоприема при флюктуационных помехах. М., Госэнергоиздат, 1961.
2. А. А. Санин, Ю. В. Минеев, А. Н. Гадалов. Новый метод измерения слабых токов в большом динамическом диапазоне.— Труды VI конференции по ядерной электронике. М., Атомиздат, 1966.
3. Л. Л. Ключев, Р. Г. Хехнев, А. Н. Зернов. Применение знакового коррелятора для повышения точности измерения слабых постоянных токов.— Приборы и техника эксперимента, 1970, № 6.

Поступила в редакцию  
1 октября 1970 г.,  
окончательный вариант —  
19 февраля 1971 г.