АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1971

ТЕОРИЯ СИСТЕМ ВОСПРИЯТИЯ И ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

УДК 62-502+621.3.088.24

А. В. ЕКИМОВ, Г. Н. СОЛОПЧЕНКО
(Ленинград)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ БЕЗЫНЕРЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Задача определения влияния внешних воздействий, рассматриваемых как случайные величины, на безынерционную нелинейную систему встречается в ряде практических ситуаций, например при исследовании динамических систем разбиением на линейные динамические звенья и нелинейное безынерционное звено [1, 2] и при исследовании нелинейных систем, работающих в условиях, когда переходные процессы затухают значительно быстрее, чем автокорреляционные функции входного сигнала и внешних воздействий.

Существующие методы определения влияния внешних воздействий основаны на следующих предположениях.

1. Известна функциональная зависимость выходной величины y от входного сигнала x и от внешних воздействий z_i $(i=1, 2, \dots, k)$

$$y = f(x, z_1, z_2, \dots, z_k) \tag{1}$$

для любого $x \in X$, где X — фазовое пространство сигнала: $\bar{z} = \{z_i\}$ — вектор внешних воздействий.

2. Внешние воздействия являются случайными величинами с известной ковариационной матрицей $\overline{K} = \{K_{ij}\}$, где

$$K_{ij} = \operatorname{cov}[z_i, z_j].$$

Тогда, линеаризуя (1), авторы [3—5] получили выражения для математического ожидания и дисперсии погрешности $\delta(x)$, вызванной внешними воздействиями. Приведем эти выражения:

$$E[\delta(x)] = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)_{z_{i_0}} (z_i - z_{i_0}) = (\bar{d}\bar{f})^T (\bar{z} - \bar{z}_0); \tag{2}$$

$$D[\delta(x)] = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)_{z_{i_0}} D(z_i) + \sum_{i,j}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial f}{\partial z_j}\right) K_{ij} = \bar{\partial} f^T \overline{K} \bar{\partial} \bar{f}, \tag{3}$$

где $z_0 = \{z_{i_0}\}$ — вектор внешних воздействий, соответствующий нормальным условиям.

Если вектор $\bar{z}$ известен (внешние воздействия измеряются), то с помощью (2) можно осуществить коррекцию выходных координат [6].

Кроме (2), (3), используется метод статистической линеаризации [7], пригодный в тех случаях, когда распределение вектора $\overline{z}$ близко к нормальному. Однако практическое применение указанных выше методов затруднено тем, что функциональная зависимость (1) и вектор $\overline{d}\, f$ в (2) и (3), как правило, априори неизвестны, экспериментальное определение вектора связано со значительными погрешностями, не говоря уже о том, что аппроксимация зависимости (1) линейными членами ряда Тейлора зачастую недостаточна. Кроме того, для определения погрешности при любом $x \in X$ необходимо найти (1) либо во всем пространстве X, либо прибегать к интерполяции значений погрешности, определенных в конечном числе точек $x \in X$.

Приводимый ниже практический метод определения влияния внешних воздействий на нелинейные безынерционные системы позволяет получить более полные статистические характеристики погрешностей на выходе нелинейной системы. Рассмотрим вначале метод определения моментов некоторой непрерывной одномерной функции случайного аргумента x: $y = f(x)$. Пусть эта функция аппроксимирована степенным полиномом

$$y = f(x) = \sum_{j=0}^{p} a_j x^j. \tag{4}$$

Статистические характеристики случайной величины x определяются из опыта путем точечного оценивания их начальных моментов μ_r. Тогда начальные моменты s-го порядка величины y определяются по формуле

$$\alpha_s = \int\limits_X \Big(\sum_{j=0}^{p} a_j x^j\Big)^s dF(x) = \int\limits_X \Big(\sum_{r=0}^{ps} b_r x^r\Big)\ dF\ (x) = \sum_{r=0}^{ps} b_r \mu_r.$$

Аналогично для центральных моментов будем иметь

$$\alpha_s^0 = \sum_{r=0}^{ps} b_r (\mu_r - \mu_1).$$

Коэффициенты b_r являются функциями коэффициентов a_j. Непосредственное выражение b_r через a_j является довольно громоздким. С целью упрощения записи соотношения между α_s и μ_j в [8] введено обозначение $\mu_{(j)}$ и правила:

1) $\mu_{(i)}\mu_{(j)} = \mu_{i+j}$; 2) $\mu_{(i)}\mu_j = \mu\ \mu_{(j)} = \mu_i\ \mu_j$; 3) $\mu_{(j)} - \mu_j \neq 0$. (5)

Эти правила позволяют получить следующие простые соотношения:

$$\alpha_s = \Big[\sum_{j=0}^{p} a_j \mu_{(j)}\Big]^s; \tag{6}$$

$$\alpha_s^0 = \Big[\sum_{j=0}^{p} a_j (\mu_{(j)} - \mu_j)\Big]^s. \tag{7}$$

Применение правил (5) к (6) и (7) проиллюстрировано в примере 1. Вводя векторы

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p \end{pmatrix}; \quad \overline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^p \end{pmatrix}; \quad \overline{M}_{(\cdot)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{(p)} \end{pmatrix}; \quad \overline{M}_{\cdot} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_p \end{pmatrix}, \tag{8}$$

перепишем (4), (6) и (7) следующим образом:

$$y = \overline{A}^T \overline{X}; \tag{9}$$

$$\alpha_s = [\overline{A}^T \overline{M}_{(\cdot)}]^s; \tag{10}$$

$$\alpha_s^0 = [\overline{A}^T (\overline{M}_{(\cdot)} - \overline{M}_{\cdot})]^s. \tag{11}$$

Пусть функциональная зависимость (4) [или (9)] описывает некоторое нелинейное звено. Тогда действие случайных возмущений на это нелинейное звено приводит к изменению матрицы коэффициентов $\overline{A}$, т. е. элементы матрицы $\overline{A}$ становятся функциями вектора внешних воздействий $\overline{z}$:

$$a_j = a_j(z). \tag{12}$$

Функции (12) предлагается аппроксимировать алгебраическими полиномами. Для этого следует получить семейство аппроксимирующих полиномов (9) при фиксированных векторах внешних воздействий z_l ($l = 0, 1, \ldots, N$):

$$y = \overline{A}_l^T \overline{X}. \tag{13}$$

Индекс $l=0$ введен для обозначения нормальных условий. Для оптимизации указанной процедуры выбор векторов z_l может осуществляться методами планирования эксперимента, применяемыми для изучения поверхности отклика.

Таким образом, получим k-мерные полиномы q_j-й степени, аппроксимирующие (12)

$$a_j(z) = H^j_{k,q_j}(z) \tag{14}$$

и являющиеся элементами матрицы $\overline{A}$ в (9)

$$y = (H^0_{k,q_0}(z), H^1_{k,q_1}(z), \ldots, H^p_{k,q_p}(z))\, X. \tag{15}$$

Распространяя метод, изложенный в [8], на данный случай, получим выражения для начальных моментов как функции от x:

$$\alpha_s = [(H^0_{k,q_0}(\bar{\beta}_{(\cdot)}), H^1_{k,q_1}(\bar{\beta}_{(\cdot)}), \ldots, H^p_{k,q_p}(\bar{\beta}_{(\cdot)}))\, X]^s; \tag{16}$$

$$\alpha_s^0 = [(H^0_{k,q_0}(\bar{\beta}_{(\cdot)} - \bar{\beta}_{\cdot}), H^1_{k,q_1}(\bar{\beta}_{(\cdot)} - \bar{\beta}_{\cdot}), \ldots, H^p_{k,q_p}(\bar{\beta}_{(\cdot)} - \bar{\beta}_{\cdot}))\, X]^s, \tag{17}$$

где $\bar{\beta}_{(\cdot)}$ и $\bar{\beta}_{\cdot}$ — векторы начальных моментов внешних воздействий z_i:

$$\bar{\beta}_{(\cdot)} = \begin{pmatrix} \beta^{(1)}_{(\cdot)} \\ \beta^{(2)}_{(\cdot)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta^{(k)}_{(\cdot)} \end{pmatrix}; \quad \beta_{\cdot} = \begin{pmatrix} \beta^{(1)}_{\cdot} \\ \beta^{(2)}_{\cdot} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta^{(k)}_{\cdot} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где индексы «(.)» и «.» означают, что при подстановке в (15) вместо z_i начальных моментов $\beta^{(i)}_{(\cdot)}$ и $\beta^{(i)}_{\cdot}$ вместо «.» следует писать число, равное показателю степени z_i в соответствующем полиноме. При этом при раскрытии (16) и (17), помимо (5), следует выполнять дополнительные правила:

$$4)\ \beta^{(i)}_{(j)} \beta^{(s)}_{(k)} = \beta_{j,k}(z_i, z_s);\ 5)\ \beta^{(i)}_{(j)} \beta^{(s)}_{k} = \beta^{(i)}_{j} \beta^{(s)}_{(k)} = \beta^{(i)}_{j} \beta^{(s)}_{k}, \tag{19}$$

где $\beta_{j,k}(z_i, z_s) = E(z_i^j z_s^k)$ — смешанный начальный момент величин z_i, z_s порядка j, k. Правила 4 и 5 естественным образом распространяются на случай большего числа сомножителей.

Из (16) и (17) легко получаются выражения для начальных моментов на выходе нелинейной системы, усредненных по X:

$$\bar{\alpha}_s = [(H^0_{k,q_0}(\bar{\beta}_{(\cdot)}), \ldots, H^p_{k,q_p}(\bar{\beta}_{(\cdot)}))\,\bar{M}_{(\cdot)}]^s; \tag{20}$$

$$\bar{\alpha}^0_s = [(H^0_{k,q_0}(\bar{\beta}_{(\cdot)} - \bar{\beta}.), \ldots, H^p_{k,q_p}(\bar{\beta}_{(\cdot)} - \bar{\beta}.))\,\bar{M}_{(\cdot)}]^s, \tag{21}$$

где через $\bar{M}_{(\cdot)}$ обозначен вектор моментов входной величины x (8). При раскрытии (20), (21), помимо 1—5, следует выполнять правила:

$$6)\ \beta^{(i)}_{(k)}\mu_{(j)} = \gamma_{k,j}(z_i, x); \quad 7)\ \beta^{(i)}_{(k)}\mu_j = \beta^{(i)}_k \mu_{(j)} = \beta^{(i)}_k \mu_j, \tag{22}$$

где $\gamma_{k,j}(z_i, x) = E(z_i^k x^j)$ — смешанный начальный момент величин z_i и x порядка k, j.

Следует отметить, что методы определения моментов случайных величин при нелинейном преобразовании, аппроксимируемом полиномами, описаны в [9, 10]. Однако автор [9] ограничился вычислением двух первых моментов в случае, когда нелинейному преобразованию подвергается аддитивная смесь детерминированного сигнала и стационарного нормального шума с известной двумерной плотностью. В [10] на случайные величины z_i наложены требования независимости и симметричности плотности их распределения. Метод, описанный выше, позволяет снять эти ограничения. Кроме того, введенные нами правила 1—7 позволяют значительно упростить алгоритм вычисления моментов по сравнению с алгоритмом, предложенным в [10].

Рассмотрим два примера, поясняющие предложенный метод и введенные правила.

Пример 1. Пусть в (17) $p=2$; $q_0=q_1=q_2=1$ (линейная аппроксимация коэффициентов a_j); $k=2$. Известны начальные моменты β_i и смешанные начальные моменты γ_{ijk} величин z_1, z_2 и x. В этом случае имеем:

$$y = a_0(\bar{z}) + a_1(\bar{z})\,x + a_2(\bar{z})\,x^2; \quad \bar{z} = \binom{z_1}{z_2};$$

$$a_0(z) = H^0_{2,1}(\bar{z}) = b_{00} + b_{10}z_1 + c_{10}z_2;$$

$$a_1(z) = H^1_{2,1}(\bar{z}) = b_{01} + b_{11}z_1 + c_{11}z_2;$$

$$a_2(z) = H^2_{2,1}(\bar{z}) = b_{02} + b_{12}z_1 + c_{12}z_2;$$

$$y = (b_{00} + b_{10}z_1 + c_{10}z_2) + (b_{01} + b_{11}z_1 + c_{11}z_2)\,x + (b_{02} + b_{12}z_1 + c_{12}z_2)\,x^2; \tag{23}$$

$$\alpha_1(x) = (b_{00} + b_{10}\beta^{(1)}_1 + c_{10}\beta^{(2)}_1) + (b_{01} + b_{11}\beta^{(1)}_1 + c_{11}\beta^{(2)}_1)\,x + (b_{02} + b_{12}\beta^{(1)}_1 + {} + c_{12}\beta^{(2)}_1)\,x^2; \tag{24}$$

$$\alpha^0_2(x) = D_y(x) = \{b_{00} + b_{10}(\beta^{(1)}_1 - \beta^{(1)}_{(1)}) + c_{10}(\beta^{(2)}_{(1)} - \beta^{(2)}_1) + [b_{01} + b_{11}(\beta^{(1)}_{(1)} - {} - \beta^{(1)}_1) + c_{11}(\beta^{(2)}_{(1)} - \beta^{(2)}_1]\,x + [b_{02} + b_{12}(\beta^{(1)}_{(1)} - \beta^{(1)}_1 + c_{12}(\beta^{(2)}_{(1)} - \beta^{(2)}_1)]\,x^2\}^2. \tag{25}$$

При возведении последнего выражения в квадрат появятся члены вида

$$(\beta^{(1)}_{(1)} + \beta^{(1)}_1)^2,\ (\beta^{(1)}_{(1)} - \beta^{(1)}_1)(\beta^{(2)}_{(1)} - \beta^{(2)}_1),$$

которые преобразуются следующим образом (см. правила 1—7):

$$(\beta^{(1)}_{(1)} - \beta^{(1)}_1)^2 = \beta^{(1)}_{(1)}\beta^{(1)}_{(1)} - 2\beta^{(1)}_{(1)}\beta^{(1)}_1 + \beta^{(1)2}_1 = \beta^{(1)}_2 - \beta^{(1)\,2}_1 = D(z_1);$$

$$(\beta_{(1)}^{(1)} - \beta_1^{(1)})(\beta_{(1)}^{(2)} - \beta_1^{(2)}) = \beta_{(1)}^{(1)}\beta_{(1)}^{(2)} - \beta_{(1)}^{(1)}\beta_1^{(2)} - \beta_1^{(1)}\beta_{(1)}^{(2)} + \beta_1^{(1)}\beta_{(1)}^{(2)} -$$
$$= \beta_{1,1}(z_1, z_2) - \beta_1^{(1)}\beta_1^{(2)} = \operatorname{cov}(z_1, z_2) = K_{1,2}\ .$$

В более общем случае, когда $\bar{z}^T = (z_1, \ldots, z_n)$,

$$(\bar{\beta}_{(1)} - \bar{\beta}_1)(\bar{\beta}_{(1)} - \bar{\beta}_1)^T = \bar{K}. \tag{26}$$

Выполняя действия, указанные в (25), получим

$$D_y(x) = D(z_1)[b_{10}^2 + 2xb_{10}b_{11} + x^2(b_{11}^2 + 2b_{12}b_{10}) + 2x^3b_{11}b_{12} + b_{12}^2x^4] +$$
$$+ D(z_2)[c_{10}^2 + 2xc_{10}c_{11} + x^2(c_{11}^2 + 2c_{12}c_{10}) + 2x^3c_{11}c_{12} + c_{12}^2x^4] +$$
$$+ 2K_{1,2}[b_{10}c_{10} + x(b_{10}c_{11} + b_{11}c_{10}) + x^2(b_{10}c_{12} + b_{12}c_{10} + b_{11}c_{11}) +$$
$$+ x^3(b_{12}c_{11} + b_{11}c_{12}) + x^4b_{12}c_{12}]. \tag{27}$$

Сравнивая выражения (23) и (27) с формулами (2) и (3), убеждаемся в том, что последние могут быть получены из (16) и (17) как частный случай при линейной аппроксимации коэффициентов a_i. В этом легко убедиться непосредственной подстановкой (23) в (2) и (3).

Из (20) и (21) находим усредненные характеристики:

$$\bar{\bar{\alpha}}_1 = (b_{00} + b_{10}\beta_{(1)}^{(1)} + c_{10}\beta_{(1)}^{(2)}) + (b_{01} + b_{11}\beta_{(1)}^{(1)} + c_{11}\beta_{(1)}^{(2)})\mu_{(1)} + (b_{02} + b_{12}\beta_{(1)}^{(1)} +$$
$$+ c_{12}\beta_{(1)}^{(2)})\mu_{(2)} = \sum_{i=0}^{2} b_{0i}\mu_i + \sum_{i=0}^{2} b_{1i}\gamma_{1i}(z_1, x) + \sum_{i=0}^{2} c_{1i}\gamma_{1i}(z_2, x); \tag{28}$$

$$\bar{\bar{\alpha}}_2 = [b_{00} + b_{10}\beta_{(1)}^{(1)} + c_{10}\beta_{(1)}^{(2)} + b_{01}\mu_{(1)} + b_{11}\beta_{(1)}^{(1)}\mu_{(1)} + c_{11}\beta_{(1)}^{(2)}\mu_{(1)} + b_{02}\mu_{(2)} +$$
$$+ b_{12}\beta_{(1)}^{(1)}\mu_{(2)} + c_{12}\beta_{(1)}^{(2)}\mu_{(2)}]^2 = b_{00}^2 + b_{10}^2\beta_2^{(1)} + c_{10}\beta_2^{(2)} + b_{01}^2\mu_2 + b_{11}^2\gamma_{2,2} \times$$
$$\times (z_1, x) + c_{11}^2\gamma_{2,2}(z_2, x) + b_{02}^2\mu_4 + b_{12}^2\gamma_{2,4}(z_1, x) + c_{12}^2\gamma_{2,4}(z_2, x) + 2b_{00}b_{10}\beta_1^{(1)} +$$
$$+ 2b_{00}c_{10}\beta_1^{(2)} + 2b_{00}b_{01}\mu_1 + 2b_{00}b_{11}\gamma_{1,1}(z_1, x) + 2b_{00}c_{11}\gamma_{1,1}(z_2, x) + 2b_{00}b_{02}\mu_2 +$$
$$+ 2b_{00}b_{12}\gamma_{1,2}(z_1, x) + 2b_{00}c_{12}\gamma_{1,2}(z_2, x) + 2b_{10}c_{10}\beta_{1,1}(z_1, z_2) + 2b_{10}b_{01}\gamma_{1,1} \times$$
$$\times (z_1, x) + 2b_{10}b_{11}\gamma_{2,1}(z_1, x) + 2b_{10}c_{11}\gamma_{1,1,1}(z_1, z_2, x) + 2b_{10}b_{02}\gamma_{1,2}(z_1, x) +$$
$$+ 2b_{10}b_{12}\gamma_{2,2}(z_1, x) + 2b_{10}c_{12}\gamma_{1,1,2}(z_1, z_2, x) + 2c_{10}b_{01}\gamma_{1,1}(z_2, x) + 2c_{10}b_{11} \times$$
$$\times \gamma_{1,1,1}(z_1, z_2, x) + 2c_{10}c_{11}\gamma_{2,1}(z_2, x) + 2c_{10}b_{02}\gamma_{1,2}(z_2, x) + 2c_{10}b_{12}\gamma_{1,1,2} \times$$
$$\times (z_1, z_2, x) + 2c_{10}c_{12}\gamma_{2,2}(z_2, x) + 2b_{01}b_{11}\gamma_{1,2}(z_1, x) + 2b_{01}c_{11}\gamma_{1,2}(z_2, x) +$$
$$+ 2b_{01}b_{02}\mu_3 + 2b_{01}b_{12}\gamma_{1,3}(z_1, x) + 2b_{01}c_{12}\gamma_{1,3}(z_2, x) + 2b_{11}c_{121}\gamma_{1,1,}(z_1, z_2, x) +$$
$$+ 2b_{11}b_{02}\gamma_{1,3}(z_1, x) + 2b_{11}b_{12}\gamma_{2,3}(z_1, x) + 2b_{11}c_{12}\gamma_{1,1,3}(z_1, z_2, x) + 2c_{11}b_{02} \times$$
$$\times \gamma_{1,3}(z_2, x) + 2c_{11}b_{12}\gamma_{1,1,3}(z_1, z_2, x) + 2c_{11}c_{12}\gamma_{2,3}(z_2, x)\, 2b_{02}b_{12}\gamma_{1,4}(z_1, x) +$$
$$+ 2b_{02}c_{12}\gamma_{1,4}(z_2, x) + 2b_{12}c_{12}\gamma_{1,1,4}(z_1, z_2, x); \tag{29}$$

$$\bar{D} = \bar{\bar{\alpha}}_2 - \bar{\bar{\alpha}}_1^2. \tag{30}$$

Если случайные возмущения $\bar{z}$ и входной сигнал x независимы, смешанные моменты $\gamma = 0$, тогда величина $\bar{D}$ может быть определена путем применения (11) к (27).

Пример 2. Исследован нелинейный преобразователь напряжения, на вход которого поступает сигнал x. Выходной сигнал зависит от напряжения питания $U_п$. Условия эксплуатации этого преобразователя позволяют считать напряжение питания случайной величиной. Известны оценки начальных моментов случайной величины $U_п$:

$$\beta_1 = E(U_п) = 12В;\ \beta_2 = 145В^2;$$
$$D[U_п] = \beta_2 - \beta_1^2 = 1В^2;\ \beta_3 = 1765\ В^3;\ \beta_4 = 21625\ В^4.$$

При различных фиксированных значениях напряжения питания получены экспериментальные кривые $y = f_{U_п}(x)$, изображенные на рис. 1. Эти кривые были аппроксимированы методом наименьших квадратов ортогональными полиномами Чебышева и имеют следующие аналитические выражения:

$$y^{(1)} = -0,21339286x^2 + 2,2249643x + 0,12535714;\quad U_п = 16\ \text{В};$$
$$y^{(2)} = -0,13214286x^2 + 1,55957144x + 0,02571428;\quad U_п = 14\ \text{В};$$
$$y^{(3)} = -0,09517857x^2 + 1,06189285x + 0,03607143;\quad U_п = 12\ \text{В};$$
$$y^{(4)} = -0,08482134x^2 + 0,80839286x + 0,0282143;\quad U_п = 10\ \text{В};$$
$$y^{(5)} = -0,05142857x^2 + 0,50371428x + 0,01714286;\quad U_п = 8\ \text{В}.$$

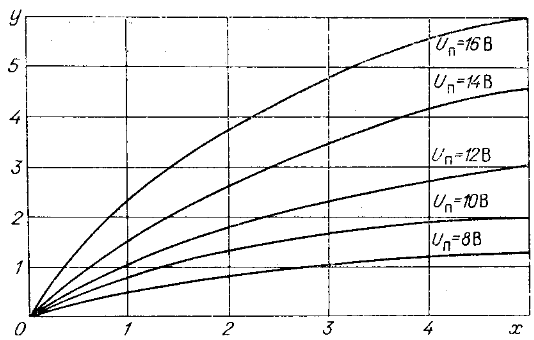

Рис. 1.

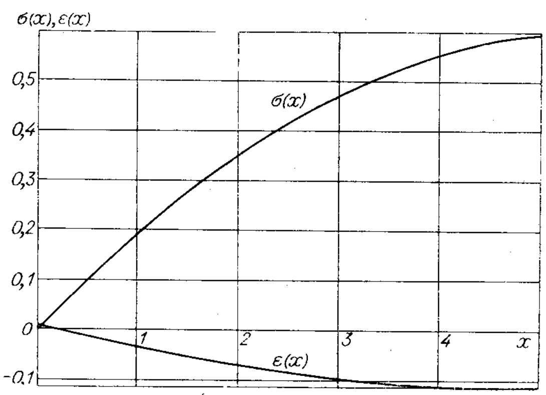

Рис. 2.

Таким образом, получен полином

$$y = \sum_{j=0}^{2} a_j x^j, \tag{31}$$

в котором коэффициенты a_j суть функции питающего напряжения $U_п$. Аппроксимированные по методу наименьших квадратов зависимости $a_j = f_j(U_п)$ имеют вид:

$$a_0 = 0,00283801\,U_п^2 - 0,057415813\,U_п + 0,304112238;$$
$$a_1 = 0,01760012786\,U_п^2 - 0,21371913764\,U_п + 1,12311736296;$$
$$a_2 = -0,002184313\,U_п^2 + 0,033861007\,U_п - 0,189709348. \tag{32}$$

Подставив (31) в (30) и воспользовавшись выражением (16), получим:

$$E(x) = 0,0266633932 + 1,110506267\,x - 0,100102649\,x^2;$$
$$D_y(x) = +0,00001818 + 0,00362779x + 0,04320872x^2.$$

На рис. 2 представлены зависимости $\varepsilon(x) = f(x)_{U_п = 12\,\text{В}} - E(x)$, $\sigma(x)$, которые показывают, что с увеличением x значение дисперсии и абсолютной ошибки возрастает. Это обстоятельство не противоречит виду семейства кривых рис. 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведен практический метод определения моментов распределения выходных координат нелинейной безынерционной системы, подверженной воздействию совокупности внешних факторов, которые в ряде практических случаев можно рассматривать как случайные величины с произвольными совместными законами распределения. Кроме того, приведенные соотношения позволяют производить уточнение выходных координат в случае, когда имеется возможность измерения значений внешних воздействий. Метод позволяет учесть стохастическую зависимость входного сигнала и внешних факторов (см. пример 1) и получить значения моментов выходных координат в любой точке $x \in X$, не прибегая к интерполяции зависимости моментов от x.

Во всех соотношениях (16), (17), (20), (21) могут быть использованы как точные значения начальных моментов, если они известны, так и их оценки. По-видимому, при реализации метода в большинстве случаев придется использовать оценки моментов, дисперсия которых при постоянном объеме выборки увеличивается с ростом порядка момента. Однако, как показывает практика (см. пример 2), моменты высшего порядка входят в соответствующие формулы с весьма малыми весами, в связи с чем влияние их неточности на дисперсию оценок моментов выходных координат окажется незначительным.

Метод позволяет определить погрешность, возникающую вследствие технологического разброса параметров нелинейных звеньев, если их параметры рассматривать как случайный вектор, определенный на множестве звеньев, которое, в свою очередь, может рассматриваться как вероятностное пространство. Начальные моменты параметров звеньев могут быть оценены на основании статистических данных о технологическом процессе их изготовления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. М. Хазен. Определение одномерной плотности вероятности и моментов процесса на выходе существенно нелинейной системы.— Теория вероятностей и ее применение, 1961, IV, № 2.
2. К. А. Пупков, Г. Г. Себряков. Ортогональный метод исследования нелинейных систем автоматического управления при случайных воздействиях.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1967, № 2.
3. Б. В. Карпюк, В. В. Малинин. Определение погрешностей выходных характеристик и допусков параметров элементов измерительных систем.— Автометрия, 1967, № 1.
4. Н. Н. Шумиловский, К. С. Клемпнер, И. М. Чередниченко. О суммарной статистической погрешности измерительных приборов.— В сб. «Проблемы электрометрии». Новосибирск, «Наука», 1967.
5. Ю. В. Кемниц. Обобщенная формула средней квадратической ошибки нелинейной функции.— ИВУЗ, серия геодезии и аэрофотосъемки, 1958, № 5.
6. М. А. Земельман. Коррекция погрешности измерительных устройств методами вспомогательных измерений.— Измерительная техника, 1968, № 1.
7. Н. Е. Казаков, Б. Г. Доступов. Статистическая динамика нелинейных систем. М., Физматгиз, 1962.
8. Г. Н. Солопченко. Определение моментов распределения стационарных случайных процессов, претерпевших нелинейные преобразования.— В сб. «Системы обработки и передачи информации». Труды ЛИАП, вып. 54. Львов, 1967.
9. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1, М., «Советское радио», 1966.
10. Л. Н. Добродеев. Развитие метода аппроксимирующих полиномов для вычисления моментов выходных координат нелинейных систем.— Автоматика и телемеханика, 1966, № 7.

Поступила в редакцию
22 мая 1970 г.