АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1971

АНАЛОГОВЫЕ И ЦИФРОВЫЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

УДК 681.2.08

В. М. ЕФИМОВ
(Новосибирск)

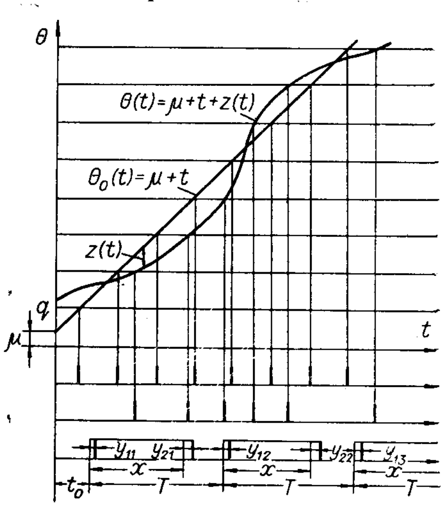
ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЯ ИНТЕРВАЛА ВРЕМЕНИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОПЕРАЦИИ УСРЕДНЕНИЯ

Измерение интервалов времени методом счета числа укладывающихся в него импульсов эквивалентно квантованию сигнала по уровню. Одинаков и анализ погрешностей, в том числе и тогда, когда производится усреднение результатов измерений интервалов, начала которых расположены независимо друг от друга [1]. Отличие наблюдается при усреднении результатов измерения интервалов, образующих периодическую последовательность. Рассмотрение последней ситуации при равноотстоящих и неравноотстоящих счетных импульсах и флюктуациях фронтов интервалов составляет содержание статьи.

Равноотстоящие счетные импульсы. Пусть последовательность счетных импульсов образуется пересечениями линии $\theta_0(t)=\mu+t$ (см. рисунок) с набором уровней $\theta=lq(l=0, 1, \ldots)$, а интервалы времени составляют периодическую последовательность так, что время начала и конца m-го интервала

$$t_{1m}=t_0+(m-1)T+y_{1m};\; t_{2m}=t_0+(m-1)T+x+y_{2m}, \qquad (1)$$

где t_0 — время начала первого интервала; T — период последовательности интервалов; y_{1m} и y_{2m} — флюктуации фронтов (начала и конца) m-го интервала; x — длительность интервала.



Очевидно, что результат измерения m-го интервала можно записать следующим образом:

$$x_m=q\int\limits_{\theta_0(t_{1m})}^{\theta_0(t_{2m})}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\theta-kq)\right)d\theta,$$

где $\delta(\theta-kq)$ — дельта-функция. Заменив в этом интеграле периодическую последовательность дельта-функций ее разложением в ряд Фурье

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\theta-kq)=\frac{1}{q}\sum_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\frac{2\pi k}{q}\theta\right], \qquad (2)$$

получим соотношение для погрешности измерения m-го интервала

$$\varepsilon_m = x_m - x = y_{2m} - y_{1m} + \frac{q}{2\pi i} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k} \exp\left[i \frac{2\pi k}{q} (\mu + t_{2m})\right] - \frac{q}{2\pi i} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k} \exp\left[i \frac{2\pi k}{q} (\mu + t_{1m})\right].$$

Две последние суммы в этом соотношении являются разложением в ряд Фурье ошибок квантования верхней и нижней границ интервала соответственно. Суммарная ошибка среднего арифметического результатов n измерений

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon_m.$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию суммарной ошибки. Естественно считать, что величина μ имеет равномерное распределение в пределах периода q последовательности счетных импульсов. Будем полагать также, что флюктуации фронтов интервала являются значениями стационарного случайного процесса $y(t)$ в моменты времени, совпадающие с началом и концом интервала, т. е.

$y_{1m} = y(t_0 + (m-1)T)$, $y_{2m} = y(t_0 + (m-1)T + x)$. Тогда

$\overline{\varepsilon}(x) = 0$, $\overline{\varepsilon^2}(x) = \overline{\varepsilon_1^2}(x) + \overline{\varepsilon_2^2}(x)$, где

$$\overline{\varepsilon_1^2}(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{-(n-1)}^{n-1} (n - |k|)(2R_y(kT) - R_y(kT + x) - R_y(kT - x)) =$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{n \sin \frac{\omega T}{2}} \right)^2 (1 - \cos \omega x)\, s_y(\omega)\, d\omega; \tag{3}$$

$$\overline{\varepsilon_2^2}(x) = \frac{1}{n^2} \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left\{ 2\cos \frac{2\pi k}{q} (m-l) T \tilde{\varphi}\left(\frac{2\pi k}{q}, (m-l)T\right) - \right.$$
$$- \cos \frac{2\pi k}{q} ((m-l)T + x)\, \tilde{\varphi}\left(\frac{2\pi k}{q}, (m-l)T + x\right) - \cos \frac{2\pi k}{q} ((m-l)T - x) \times$$
$$\left. \times \tilde{\varphi}\left(\frac{2\pi k}{q}, (m-l)T - x\right) \right\}. \tag{4}$$

Здесь $R_y(\tau)$ и $s_y(\omega)$ — корреляционная функция и спектральная плотность процесса $y(t)$; $\tilde{\varphi}\left(\frac{2\pi k}{q}, \tau\right)$ — характеристическая функция разности $\eta(\tau) = y(t+\tau) - y(t)$, т. е. приращения процесса $y(t)$ на отрезке времени τ.

Формулы (3) и (4) определяют дисперсию ошибки среднеарифметического как функцию длины интервала x. Если рассматривать x как случайную величину, то дисперсию суммарной ошибки необходимо усреднить по x:

$$\overline{\overline{\varepsilon^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\overline{\varepsilon_1^2}(x) + \overline{\varepsilon_2^2}(x) \right) dx,$$

где $f(x)$ — плотность вероятности x. При этом легко вычисляется только математическое ожидание первой составляющей дисперсии

$$\overline{\overline{\varepsilon_1^2}} = 2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\,\omega T}{2}}{n\sin\frac{\omega T}{2}}\right)^2 (1-\operatorname{Re}\tilde{f}(\omega))\, s_y(\omega)\, d\,\omega,$$

где $\operatorname{Re}\tilde{f}(\omega)$ — действительная часть характеристической функции интервала x.

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $y(t) = \text{const}$, т. е. фронты всех интервалов сдвинуты на одинаковую величину. Тогда $R_y(\tau) = 1$, $\tilde{\varphi}\left(\frac{2\pi k}{q}, \tau\right) = 1$ и

$$\overline{\overline{\varepsilon^2}} = \frac{q^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi k n T}{q}}{n\sin\frac{\pi k T}{q}}\right)^2\left(1-\operatorname{Re}\tilde{f}\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right). \tag{5}$$

Эта формула является решением задачи, рассмотренной в [2]. Если отношение $\frac{\sigma_x}{q}$ велико, то величиной $\operatorname{Re}\tilde{f}\left(\frac{2\pi k}{q}\right)$ в формуле (5) можно пренебречь, и

$$\overline{\overline{\varepsilon^2}} \cong \frac{q^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi k n T}{q}}{n\sin\frac{\pi k T}{q}}\right)^2.$$

Значение $\overline{\overline{\varepsilon^2}}$ меняется в широких пределах в зависимости от отношения $\frac{T}{q}$. Если период T кратен периоду q, то $\overline{\overline{\varepsilon^2}} = \frac{q^2}{6}$, т. е. операция усреднения не приводит к уменьшению погрешности по сравнению с одиночным измерением. При выполнении условия $\frac{T}{q} - \left[\frac{T}{q}\right] = \frac{1}{n}$ $\left(\left[\frac{T}{q}\right]\right.$ — целая часть отношения) дисперсия погрешности среднего арифметического достигает наименьшего значения $\overline{\overline{\varepsilon^2}} = \frac{q^2}{6n^2}$, что эквивалентно проведению одного измерения с периодом последовательности счетных импульсов, равным $\frac{q}{n}$. Аналогичный эффект наблюдается при сдвиге положения шкалы аналого-цифрового преобразователя от измерения к измерению на величину $\frac{q}{n}$ [3].

2. Пусть далее значения флюктуаций $y(t)$ для несовпадающих моментов времени независимы. В этом случае $R_y(0) = 1$, $R_y(\tau) = 0$; приращение $\eta(0) = 0$, $\eta(\tau) = \eta$ является разностью независимых значений $y(t)$, $\tilde{\varphi}\left(\frac{2\pi k}{q}, 0\right) = 1$, $\tilde{\varphi}\left(\frac{2\pi k}{q}, \tau\right) = \left|\tilde{\varphi}_y\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right|^2$, где $\tilde{\varphi}_y\left(\frac{2\pi k}{q}\right)$ — характеристическая функция $y(t)$. Поэтому

$$\overline{\overline{\varepsilon^2}} = 2\frac{\sigma_y^2}{n} + \frac{1}{n}\frac{q^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(1-\left|\tilde{\varphi}_y\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right|^2\right) + \frac{q^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left|\tilde{\varphi}_y\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right|^2 \times$$

$$\times\left(\frac{\sin\frac{\pi k n T}{q}}{n\sin\frac{\pi k T}{q}}\right)^2\left(1-\operatorname{Re}\tilde{f}\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right). \tag{6}$$

Если отношение $\frac{\sigma_y}{q}$ мало, то при расчетах удобнее пользоваться асимптотической оценкой двух первых слагаемых (6) (см. [1]):

$$2\frac{\sigma_y^2}{n}+\frac{1}{n}\frac{q^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(1-\left|\tilde{\varphi}_y\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right|^2\right)\cong\frac{q\overline{|\eta|}}{n},$$

где $\overline{|\eta|}$ — первый абсолютный момент разности двух независимых значений $y(t)$. Это приближенное равенство является точным, если диапазон изменения $y(t)$ не превосходит q. Относительно последнего слагаемого (6) справедливы те же замечания, что и относительно (5).

Флюктуации периода счетных импульсов. Усложним модель образования последовательности счетных импульсов. Пусть моменты их возникновения определяются пересечениями линии $\theta(t)=\mu+t+z(t)$ с тем же набором уровней (см. рисунок). При этом последовательность счетных импульсов будет отличаться от периодической. На функцию $z(t)$ наложим ограничение, позволяющее существенно упростить анализ: $z'(t)>-1$. Выполнение этого ограничения означает, что функция $\theta(t)$ пересекается с каждым уровнем только один раз. Поэтому результат измерения m-го интервала

$$x_m=q\int_{\theta(t_{1m})}^{\theta(t_{2m})}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\theta-kq)\right)d\theta.$$

Отсюда с учетом (1) и (2) вытекает формула для ошибки измерения m-го интервала:

$$\varepsilon_m=x_m-x=y_{2m}-y_{1m}+z(t_{2m})-z(t_{1m})+\frac{q}{2\pi i}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k}\exp\left[i\,\frac{2\pi k}{q}(\mu+\right.$$
$$\left.+t_{2m}+z)t_{2m}))\right]-\frac{q}{2\pi i}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k}\exp\left[i\frac{2\pi k}{q}\left(\mu+t_{1m}+z(t_{1m})\right)\right].$$

Это соотношение является исходным для последующих расчетов.

Рассмотрим частные случаи, так как при общих предположениях выражение для дисперсии погрешности среднего арифметического слишком громоздко. Функцию $z(t)$ будем полагать случайной и стационарной.

1. Пусть $y(t)=\text{const}$. В этом случае дисперсия среднего арифметического определяется формулами (3) и (4), в которых характеристики процесса $y(t)$ нужно заменить на соответствующие характеристики процесса $z(t)$. Следовательно, при сделанных выше предположениях относительно производной $z'(t)$ флюктуации периода последовательности счетных импульсов эквивалентны флюктуациям фронтов интервалов.

2. Флюктуации фронтов независимы. В этом случае $\overline{\overline{\varepsilon^2}}=\overline{\overline{\varepsilon_1^2}}+\overline{\overline{\varepsilon_2^2}}$, где

$$\overline{\overline{\varepsilon_1^2}}=2\frac{\sigma_y^2}{n}+2\int_{-\infty}^{\infty}\left[1-|\tilde{\varphi}_y(\omega)|^2+\left(\frac{\sin\frac{n\omega T}{2}}{n\sin\frac{\omega T}{2}}\right)^2|\tilde{\varphi}_y(\omega)|^2\left(1-\mathrm{Re}\,\tilde{f}(\omega)\right)\right]\times$$
$$\times s_z(\omega)\,d\omega; \qquad (7)$$

$$\overline{\overline{\varepsilon_2^2}}=\int_{-\infty}^{\infty}dx f(x)\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\,\varphi(\eta)\left\{\frac{1}{n^2}\frac{q^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(1-\tilde{\psi}\left(\frac{2\pi k}{q},\eta\right)\cos\frac{2\pi k}{q}\eta\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\Big[2\cos\frac{2\pi k}{q}((m-l)T+\eta)\tilde{\psi}\Big(\frac{2\pi k}{q},(m-l)T+\eta\Big)-$$

$$-\cos\frac{2\pi k}{q}((m-l)T+x+\eta)\tilde{\psi}\Big(\frac{2\pi k}{q},(m-l)T+x+\eta\Big)-\cos\frac{2\pi k}{q}((m-l)T-$$

$$-x+\eta)\tilde{\psi}\Big(\frac{2\pi k}{q},(m-l)T-x+\eta\Big)\Big]\Big\}. \qquad (8)$$

Здесь $s_z(\omega)$ — спектральная плотность процесса $z(t)$; $\tilde{\psi}\left(\frac{2\pi k}{q},\tau\right)$ — характеристическая функция приращения процесса $z(t)$ на отрезке времени τ, т. е. величины $\lambda(\tau)=z(t+\tau)-z(t)$; $\varphi(\eta)$ — плотность вероятности η (разности двух независимых значений процесса $y(t)$).

Если время зависимости процесса $z(t)$ не превышает наименьшего значения интервала x, то формулы (7) и (8) существенно упрощаются:

$$\overline{\overline{\varepsilon^2}}=2\frac{\sigma_y^2+\sigma_z^2}{n}+\frac{1}{n}\frac{q^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(1-\left|\tilde{\varphi}_y\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\tilde{\psi}_z\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right|^2\right)+\frac{q^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\times$$

$$\times\left|\tilde{\varphi}_y\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\tilde{\psi}_z\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right|^2\left(\frac{\sin\frac{\pi knT}{q}}{n\sin\frac{\pi kT}{q}}\right)^2\left(1-\operatorname{Re}\tilde{f}\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right), \qquad (9)$$

где $\tilde{\psi}_z\left(\frac{2\pi k}{q}\right)$ — характеристическая функция процесса $z(t)$. Сравнивая (9) с (6), можно убедиться, что в данном случае флюктуации фронтов интервала и периода последовательности счетных импульсов аддитивны.

В заключение заметим, что при $n=1$ полученные в работе соотношения определяют дисперсию погрешности одиночного измерения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Ефимов. Квантование по времени при измерении и контроле. М., «Энергия», 1969.
2. Э. И. Вологдин. Повышение точности преобразования временных интервалов в цифровой код методом корреляционного усреднения.— Автометрия, 1969, № 2.
3. С. М. Персин. Квантование по уровню при цифровых измерениях.— Автометрия, 1969, № 2.

Поступила в редакцию
12 апреля 1971 г.