А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 2 1971

УДК 62-503

В. А. ВИТТИХ, Я. М. ЦЕЙТЛИН
(Куйбышев)

ОЦЕНКИ ε-ЭНТРОПИИ КЛАССОВ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ПОЛИНОМАМИ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

Задача сжатия измерительной информации включает в себя оценку ε-энтропии класса сигналов и нахождение способов кодирования, минимизирующих число двоичных разрядов при заданной погрешности аппроксимации [1, 2]. Определение ε-энтропии производится обычно для сравнительно «широких» классов функций (классов аналитических функций, n раз дифференцируемых функций, для функций, удовлетворяющих условию Липшица и т. д.) [3, 4]. Однако сигналы, встречающиеся в практике измерений, очень часто можно отнести к более «узким» классам функций. Так, например, на ограниченных отрезках времени сигналы могут быть представлены в виде полиномов конечной степени. Именно такая математическая модель является наиболее распространенной при разработке алгоритмов адаптивной дискретизации сигналов [2].

Очевидно, что учет дополнительной априорной информации об измеряемых сигналах может привести к увеличению коэффициента сжатия. В этой связи представляет интерес оценка выигрыша в числе двоичных разрядов, который получается при переходе к подклассам функций.

В статье определена ε-энтропия $H_\varepsilon(Y_n)$ класса функций Y_n, представляющих собой полиномы конечной степени с коэффициентами, ограниченными по абсолютной величине. Оценку ε-энтропии класса Y_n также можно получить из более общих соображений, считая, например, Y_n принадлежащим более широкому классу функций $Y_{L,g}$, удовлетворяющих условию Липшица, т. е. $|y(x_2)-y(x_1)|\leqslant L|x_2-x_1|$ для всех x из области определения функции $y(x)$, и не превышающих в точке $x=0$ величины g ($|y(0)|\leqslant g$). В работе производится сравнительная оценка полученной таким образом величины $H_\varepsilon(Y_n\subset Y_{L,g})$ с $H_\varepsilon(Y_n)$ и указываются условия, при которых имеет место экономия в числе двоичных разрядов.

Линейные функции. Пусть задан класс полиномов первой степени Y_1. Не умаляя общности рассуждений, будем считать, что функции $y=ax+b$ определены на отрезке [0,1], поскольку к произвольному отрезку [α, β] можно перейти с помощью простой замены переменной. Каждой функции $y(x)$ поставим в соответствие точку на плоскости с координатами (a, b). В качестве критерия близости двух функций y_1 и y_2 примем величину

$$\rho(y_1, y_2)=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|y_1(x)-y_2(x)|.$$

Расстояние от начала координат определяется формулой

$$\rho(y,0) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |y| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |ax + b| = \max(|b|, |a+b|),$$

т. е. кругу радиуса ε с центром в начале координат соответствует параллелограмм на плоскости коэффициентов, ограниченный прямыми $b = \pm\varepsilon$, $a+b = \pm\varepsilon$. Всякий круг с центром в точке (a_0, b_0) получается, очевидно, параллельным сдвигом круга с центром в начале координат.

Будем считать, что множество функций Y_1 состоит из функций, для которых $|a+b| \leqslant A$; $|b| \leqslant B$. Иначе говоря, Y_1 лежит внутри некоторого параллелограмма.

Рассекая параллелограмм прямыми, параллельными его сторонам и отстоящими друг от друга на расстоянии 2ε, получим ε-сеть, число элементов которой будет оцениваться величиной

$$\frac{A}{\varepsilon}\frac{B}{\varepsilon} \leqslant N \leqslant \left(\frac{A}{\varepsilon} + 1\right)\left(\frac{B}{\varepsilon} + 1\right),$$

т. е. ε-энтропия $H_\varepsilon(Y_1) = \log_2 N$ удовлетворяет неравенству

$$2\log_2\frac{1}{\varepsilon} + \log_2 AB \leqslant H_\varepsilon(Y_1) \leqslant 2\log_2\frac{1}{\varepsilon} + \log_2[(A+\varepsilon)(B+\varepsilon)]. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим оценку величины $H_\varepsilon(Y_1 \subset Y_{L,g})$, считая, что Y_1 принадлежит классу функций, удовлетворяющих на отрезке $[0,1]$ условию Липшица.

Угол наклона прямой из Y_1, изменяющейся с максимальной скоростью, будет равен

$$L = \frac{A - (-B)}{1} = A + B. \quad (2)$$

Оценка ε-энтропии класса функций $Y_{L,g}$ имеет вид [3, 4]

$$\frac{L}{\varepsilon} + \log_2\frac{g}{\varepsilon} - 2 \leqslant H_\varepsilon(Y_{L,g}) \leqslant \frac{L}{\varepsilon} + \log_2\frac{g}{\varepsilon} + 2. \quad (3)$$

Подставив (2) в (3) и учитывая, что $g = B$, найдем оценку снизу для величины $H_\varepsilon(Y_1 \subset Y_{L,g})$:

$$\underline{H}_\varepsilon(Y_1 \subset Y_{L,g}) = \frac{A+B}{\varepsilon} + \log_2\frac{B}{\varepsilon} - 2. \quad (4)$$

Для сравнения рассмотрим «худший случай», т. е. вычтем из нижней грани $\underline{H}_\varepsilon(Y_1 \subset Y_{L,g})$ верхнюю грань $\overline{H}(Y_1)$, определяемую формулой (1):

$$\Delta H(Y_1) = H_\varepsilon(Y_1 \subset Y_{L,g}) - \overline{H}_\varepsilon(Y_1) = \frac{A+B}{\varepsilon} + \log_2\frac{B}{\varepsilon} - 2\log_2\frac{1}{\varepsilon} -$$

$$- \log_2[(A+2\varepsilon)(B+2\varepsilon)] - 2.$$

При $\varepsilon \to 0$ эта разность $\Delta H(Y_1)$ может быть сколь угодно большой.

Таким образом, при малых погрешностях (порядка десятых и сотых долей от максимального значения функции) учет априорной информации о линейности функций на отрезке $[0,1]$ позволяет существенно экономить число двоичных разрядов, требуемых для кодирования функций с точностью до ε.

Полиномы второй степени. Рассмотрим теперь класс полиномов второй степени Y_2

$$y = ax^2 + bx + c,$$

определенных на отрезке [0,1]. Аналогично предыдущему случаю каждому многочлену $y(x)$ поставим в соответствие точку трехмерного пространства (a, b, c). При этом расстояние от начала координат определится формулой

$$\rho(y,0) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |ax^2 + bx + c| = \max\left(|c|, |a+b+c|, \left|c - \frac{b^2}{4a}\right|\right),$$

так как max $|y|$ лежит либо на концах отрезка, либо в точке экстремума $x = -b/2a$.

Учитывая, что сеть, равномерно приближающая коэффициенты с точностью $\frac{\varepsilon}{3}$, приближает многочлен с точностью, не меньшей чем ε, можно получить оценку сверху для $H_\varepsilon(Y_2)$.

Если $|a| \leqslant A$, $|b| \leqslant B$, $|c| \leqslant C$, то

$$H_\varepsilon(Y_2) \leqslant 3\log_2\frac{1}{\varepsilon} + \log_2(3A+\varepsilon)(3B+\varepsilon)(3C+\varepsilon). \quad (5)$$

Если рассматривать теперь Y_2 как подкласс $Y_{L,g}$, то, учитывая, что $g = C$, а $L = 2A + B$, получим

$$H_\varepsilon(Y_2 \subset Y_{L,g}) \geqslant \frac{2A+B}{\varepsilon} + \log_2\frac{1}{\varepsilon} + \log_2 C - 2. \quad (6)$$

Из сравнения (5) и (6) следует, что и в данном случае при достаточно малых ε $H_\varepsilon(Y_2)$ становится существенно меньше $H_\varepsilon(Y_2 \subset Y_{L,g})$.

Полиномы n-й степени. Замечая, что сеть, равномерно приближающая коэффициенты полинома $(n+1)$-й степени с точностью $\frac{\varepsilon}{n+1}$, приближает полином с точностью не меньшей, чем ε, и учитывая известную [3, 4] формулу для ε-энтропии множества в $(n+1)$-мерном эвклидовом пространстве

$$H_\varepsilon^*(\varphi) = (n+1)\log_2\frac{1}{\varepsilon} + O_\varphi(1),$$

находим, что для малых ε $H_\varepsilon(Y_n) \leqslant H_\varepsilon(Y_{L,g})$ при любом n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Меньшиков. Двоичная аппроксимация: основы теории, применение к вопросам передачи сообщений. Л., Изд-во ЛЭИС, 1968.
2. В. А. Виттих, А. Н. Гинзбург. Некоторые общие вопросы теории сокращенного представления измерительных сигналов.— Автометрия, 1968, № 3.
3. А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах.— Успехи математических наук, 1959, т. 14, вып. 2.
4. А. Г. Витушкин. Оценка сложности задачи табулирования. М., Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию
31 марта 1970 г.,
окончательный вариант —
6 апреля 1971 г.