

Г. В. КРИВОЩЕКОВ, Н. Г. НИКУЛИН, Р. И. СОКОЛОВСКИЙ

(Новосибирск)

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ИМПУЛЬСНОМОДУЛИРОВАННЫМИ ВОЛНАМИ СВЕТА

(Обзор)

Введение. Интерес к исследованию возбуждения второй гармоники в нелинейных кристаллах сверхкороткими импульсами света [1—3] связан с появлением новых явлений, обусловленных групповым запаздыванием взаимодействующих волн. В настоящей работе анализируется зависимость формы импульса второй гармоники от формы импульса накачки. Теоретическое рассмотрение этого вопроса наталкивается на серьезные трудности, связанные с тем, что дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами имеют решение только в исключительных случаях. Характерным параметром задачи является l_k/l_γ , где l_k — квазистатическая длина [1, 4], а l_γ — длина нелинейного преобразования [1, 4]. Для случая, когда $l_k \gg l_\gamma$, предлагается использовать метод ВКБ для получения асимптотического решения, а при $l_k \ll l_\gamma$ весьма хорошей аппроксимацией вынуждающей силы является δ -функция.

Кроме того, в предлагаемой статье рассмотрен случай, когда вторая гармоника возбуждается двумя одновременными импульсами накачки. В области перекрытия импульсов накачки возбуждается поле на двойной частоте, пространственное распределение которого несет информацию о структуре и длительности импульсов [5]. Приведены распределения для некоторых видов импульсов и показано, что двулучепреломление кристалла приводит к уширению или сдвигу пространственного распределения.

Основные уравнения. Возбуждение гармоник в нелинейной немагнитной среде описывается уравнениями Максвелла

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (1)$$

дополненными материальными уравнениями, связывающими вектор поляризации \vec{P} с напряженностью электрического поля \vec{E} [4]. В оптическом диапазоне вдали от резонансных частот среды [6] вследствие малости нелинейности справедливо разложение поляризации в ряд по степеням напряженности поля. В дипольном приближении это разложение схематически можно представить в виде [4]

$$\vec{P} = \chi \vec{E} + \chi \vec{E} \vec{E} + \dots \quad (2)$$

Первый член разложения (2) описывает обычную линейную поляризацию среды. Без учета пространственной дисперсии [7, 8]

$$P_i^{\wedge}(t) = \hat{\chi} E = \int_0^{\infty} \chi_{ij}(t') E_j(t-t') dt', \quad (3)$$

где χ_{ij} — линейная восприимчивость. По двум повторяющимся индексам здесь и в дальнейшем подразумевается суммирование. Второй член разложения (2) — так называемая квадратичная нелинейная поляризация. Для среды без пространственной дисперсии [7]

$$P_i^{\text{нл}}(t) = \int_0^{\infty} dt' \int_0^{\infty} dt'' \chi_{ijk}(t', t'') E_j(t-t') E_k(t-t'-t''). \quad (4)$$

При решении задач о возбуждении гармоник удобно перейти от уравнений Максвелла (1) к волновому уравнению для напряженности электрического поля \vec{E} ($\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$) [4]

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (1 + 4\pi\hat{\chi}) \vec{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}^{\text{нл}}, \quad (5)$$

которое вместе с материальными уравнениями (3) и (4) описывает процесс распространения волн в слабонелинейной среде.

Решение уравнения (5) будем искать методом медленно меняющихся амплитуд [9]. Представим поле в среде в виде суммы волн

$$\vec{E} = \sum \vec{e} A(t, \vec{r}) e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}, \quad (6)$$

амплитуды которых медленно меняются как на длине волны излучения, так и за период колебаний. Через \vec{k} в (6) обозначены волновые векторы однородных волн в среде, а через \vec{e} — их поляризации*. Подставляя (6) в (5), можно получить (см. приложение) уравнение для амплитуд [9]

$$2i[\vec{e} \times (\vec{k} \times \vec{e})] \left(\nabla A + \vec{S} \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \vec{e} \vec{P}^{\text{нл}}(\omega) e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}. \quad (7)$$

Здесь $\vec{P}^{\text{нл}}(\omega)$ — компонента поляризации на частоте ω ; \vec{S} — лучевой вектор, определяемый соотношением

$$\vec{S} = \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \right)}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \right)^2}. \quad (8)$$

Этот вектор коллинеарен вектору $\vec{E} \times \vec{H}$, направленному вдоль потока энергии.

При выводе уравнения (7) мы ограничились первым приближением теории дисперсии и пренебрегли дисперсионным расплыванием волновых

* Волновой вектор волны в кристалле и ее поляризация связаны соотношением [10]

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}) - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + 4\pi\hat{\chi}) \vec{e} = 0.$$

пакетов. Подобное предположение справедливо, если длина l , которую проходит волна в кристалле, удовлетворяет условию

$$l \ll \frac{2 \pi^2 c^2 \tau^2}{n^2 \frac{dn}{d\lambda}},$$

где τ — длительность импульса; λ — длина волны света; n — показатель преломления. Для импульсов длительностью $\tau \gg 10^{-13}$ с практически всегда можно пренебречь расплыванием волновых пакетов, так как используемые кристаллы имеют длину порядка нескольких сантиметров. Для импульсов короче 10^{-13} с принятый здесь подход теряет силу, и этот случай нужно рассматривать особо.

В анизотропной среде падающая волна образует две преломленные волны (волны накачки), которые, в свою очередь, возбуждают волны нелинейной поляризации (4) и волны гармоник. Иногда [11] можно добиться хорошего согласования фазовых скоростей волны накачки с одной из волн второй гармоники. В этом наиболее простом и практически важном случае можно считать, что поле в кристалле представляет собой сумму двух волн с частотами ω и 2ω

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{e}_1 \vec{A}_1(t, \vec{r}) e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})} + \vec{e}_2 \vec{A}_2(t, \vec{r}) e^{i(2\omega t - \vec{k}_2 \vec{r})}. \quad (9)$$

Другими волнами пренебрегаем, так как им соответствуют большие рассогласования фазовых скоростей, а следовательно, и чрезвычайно малые амплитуды.

Пусть нелинейная среда занимает пространство $z > 0$ и ось z направлена в среду. На границу ($z=0$) нормально падает амплитудномодулированная волна (импульс) с бесконечным плоским фазовым фронтом. Для амплитуд A_1, A_2 в (9) справедливы уравнения (7) $(\nabla A = \vec{n} \frac{\partial A}{\partial z}$,

\vec{n} — нормальный вектор к плоскости $z=0$)

$$\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t} = -i \gamma_1 \bar{A}_2 \bar{A}_1^* e^{i \Delta k z}; \quad (10a)$$

$$\frac{\partial \bar{A}_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t} = -i \gamma_2 \bar{A}_1^2 e^{-i \Delta k z}, \quad (10б)$$

где $u_{1,2}$ — групповые скорости волн; $\Delta k = 2k_{1z} - k_{2z}$ — расстройка волновых векторов; $\gamma_{1,2}$ — нелинейные константы $(\gamma_i = \frac{4\pi\omega_i^2}{c^2 k_i} \vec{e}_i \chi \vec{e} \vec{e}; \omega_1 = \omega; \omega_2 = 2\omega)$.

Перейдем в уравнениях (10) от комплексных амплитуд $\bar{A}_{1,2}$ к действительным $A_{1,2}$, положив

$$\bar{A}_{1,2} = A_{1,2} e^{i \varphi_{1,2}(z)}. \quad (11)$$

Система уравнений (10) будет эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} + \gamma_1 A_1 A_2 \sin \Phi = 0; \quad (12a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} - \gamma_2 A_1^2 \sin \Phi = 0; \quad (12б)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Delta k + \left(2 \gamma_1 A_2 - \gamma_2 \frac{A_1^2}{A_2} \right) \cos \Phi = 0, \quad (12в)$$

где $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta kz$. В случае равенства фазовых скоростей нелинейной поляризации и второй гармоники $\Delta k = 0$ (условие синхронизма) уравнение (12в) имеет стационарное решение $\Phi = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, в синхронизме

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} + \gamma A_1 A_2 = 0; \quad (13a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} - \gamma A_1^2 = 0, \quad (13б)$$

причем $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ в силу свойств симметрии тензора χ_{ijkl} нелинейной поляризации [4]

$$2 \chi_{1ijj} (2\omega = \omega + \omega) = \chi_{jij} (\omega = 2\omega - \omega).$$

Систему равнений (13) следует дополнить граничными условиями:

$$A_1|_{z=0} = A_{10}(t); A_2|_{z=0} = 0. \quad (14)$$

Последнее граничное условие — приближенное, так как пренебрегается отраженной волной на частоте 2ω .

Уравнения (13) оказываются эквивалентными одному нелинейному уравнению. Чтобы найти последнее, продифференцируем (13б) по z и по t , а затем из полученных уравнений с помощью (13а) исключим производную от A . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_2 + \frac{1}{u_2} \frac{\partial}{\partial t} A_2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_2 + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} \right) + \\ + 2 \gamma^2 A_1^2 A_2 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Воспользуемся теперь уравнением (13б) и сгруппируем члены следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_2}{\partial t} + \gamma A_2^2 \right) + \frac{1}{u_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_2}{\partial t} + \gamma A_2^2 \right) = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) выполняется тождественно, если [1]

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_2}{\partial t} + \gamma A_2^2 = f \left(t - \frac{z}{u_2} \right), \quad (17)$$

где f — функция, вид которой можно определить из граничных условий (14). Легко видеть, что

$$f \left(t - \frac{z}{u_2} \right) = \gamma A_{10}^2 \left(t - \frac{z}{u_2} \right). \quad (18)$$

Если провести замену переменных

$$z = z, \quad \eta = t - \frac{z}{u_1}, \quad (19)$$

то можно придать уравнению (17) более удобный вид [1]:

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \gamma A_2^2 = \gamma A_{10}^2 (\eta - \nu z), \quad (20)$$

где $\nu = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}$ характеризует расстройку групповых скоростей импульсов накачки и второй гармоники.

Приближенные методы решения. При $\nu \neq 0$ уравнение (20) не имеет решения в известных функциях при произвольных формах импульсов накачки. В этой ситуации целесообразно рассмотреть приближенные методы решения. Прежде всего это метод заданного поля [4, 9]. Предполагается, что амплитуда A_1 накачки не зависит от длины кристалла z . Ясно, что соответствующее приближенное решение аппроксимирует точное решение уравнения (20) на расстояниях $z \ll l_\gamma$, где $l_\gamma = (\gamma A_0)^{-1}$ — длина, на которой преобразуется 75% энергии накачки во вторую гармонику при монохроматическом возбуждении [1, 4, 9].

В приближении заданного поля в уравнении (20) следует пренебречь членом γA_2^2 как членом более высокого порядка малости по отношению к оставшимся. Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{dA_2}{dz} = \gamma A_1^2 (\eta - \nu z),$$

решение которого с учетом граничных условий (14) будет следующим:

$$A_2(z, t) = \gamma \int_0^z A_{10}^2 (\eta - \nu z) dz. \quad (21)$$

Формулу (21) можно рассматривать как свертку импульса $A_{10}^2(\eta)$ с щелевой аппаратной функцией [12]. При $\nu z \ll \tau$ или, что то же, $z \ll l_k = \frac{\tau}{\nu}$ форма импульса второй гармоники является точным квадратом импульса накачки, а величина его пропорциональна z , т. е. ширине «щели». В другом предельном случае $\nu z \gg \tau$ ($z \gg l_k$) ширина импульса второй гармоники совпадает с νz , т. е. с шириной аппаратной функции. Форма импульса близка к прямоугольному с высотой $\gamma l_k A_0^2$ [3], где A_0 — амплитуда импульса накачки. Для иллюстрации сказанного вычислим форму импульса второй гармоники для следующего импульса накачки:

$$A_{10}(t) = A_0 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21), найдем, что

$$A_2(z, t) = \gamma A_0^2 l_k \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\tau} - \operatorname{arctg} \frac{\eta - \nu z}{\tau} \right\} \quad (23)$$

в полном согласии с высказанными выше качественными соображениями.

Рассмотренное решение применимо, когда $z \ll l_\gamma$. Если при этом $z \gg l_k$, то форма импульса второй гармоники определяется расстройкой групповых скоростей ν . При отсутствии синхронизма вместо системы (13) следует воспользоваться системой (10). Переходя к таким же переменным, что и выше, выражение для комплексной амплитуды второй гармоники можно записать так:

$$\bar{A}_2(t, z) = -i \gamma \int_0^{z'} A_{10}^2 \left(t - \frac{z}{u_1} - \nu z'\right) e^{-i \Delta k z'} dz'. \quad (24)$$

Результат интегрирования (24) более нагляден, если ввести спектр комплексных амплитуд [1,2]. Тогда спектр амплитуды второй гармоники будет описываться соотношением

$$S_2(\Omega, t) = 2i\gamma e^{i\left[\frac{(\Omega v - \Delta k)}{2} - \frac{\Omega}{u_2}\right]z} \frac{\sin(\Omega v - \Delta k) \frac{z}{2}}{(\Omega v - \Delta k)} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} S_{10}(\Omega - \Omega') S_{10}(\Omega') d\Omega', \quad (25)$$

где

$$S_{10}(\Omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{10}(t) e^{-i\Omega' t} dt. \quad (26)$$

Из (25) следует, что спектр интенсивности второй гармоники сужается с увеличением пути в кристалле

$$I_2(2\omega - \Omega) = S_2(\Omega) S_2^*(\Omega) \propto \frac{\sin^2[(2\omega - \Omega)v - \Delta k] \frac{z}{2}}{[(2\omega - \Omega)v - \Delta k]^2}, \quad (27)$$

а максимум спектральной плотности гармоники соответствует частоте

$$\Omega_{\max} = 2\omega - \frac{\Delta k}{v}. \quad (28)$$

Таким образом, при $\Delta k \neq 0$ ($z > l_k$), как и при синхронизме, длительность импульса второй гармоники возрастает. Кроме того, центральная частота импульса гармоники зависит от расстройки волновых векторов Δk .

Рассмотрим еще один приближенный метод решения уравнения (20), справедливый при $l_k \gg l_\gamma$. В уравнении (20) удобно перейти к безразмерным функциям и аргументам, полагая

$$A_{10} = A_0 \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right); \quad A_2 = A_0 f(\tilde{z}); \quad \tilde{z} = \frac{z}{l_k}. \quad (29)$$

Функция $f\tilde{z}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{df(\tilde{z})}{d\tilde{z}} + \frac{l_k}{l_\gamma} f^2(\tilde{z}) = \frac{l_k}{l_\gamma} \varphi^2(\xi - \tilde{z}), \quad (30)$$

где $\xi = \frac{\eta}{\tau}$. Введем функцию $F(\tilde{z})$ такую, что

$$f(\tilde{z}) = \frac{l_\gamma}{l_k} \frac{1}{F(\tilde{z})} \frac{dF(\tilde{z})}{d\tilde{z}}. \quad (31)$$

Перепишем (30) в виде

$$\frac{d^2 F(\tilde{z})}{d\tilde{z}^2} - \left(\frac{l_k}{l_\gamma}\right)^2 \varphi^2(\xi - \tilde{z}) F(\tilde{z}) = 0. \quad (32)$$

Асимптотическое решение этого уравнения (при $l_k \gg l_\gamma$) может быть найдено методом ВКБ [13, 14] и является линейной комбинацией функций

$$F_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi - \tilde{z})}} e^{\pm \frac{l_k}{l_\gamma} \int_0^{\tilde{z}} \varphi(\xi - z') dz'} \quad (33)$$

Соответствующие коэффициенты выбираются так, чтобы удовлетворить граничным условиям (14). Таким образом, приходим к формуле

$$f(\xi, \tilde{z}) = \left[\varphi(\xi, \tilde{z}) - \frac{l_k}{l_\gamma} \frac{\varphi'(\xi, \tilde{z})}{2\varphi(\xi, \tilde{z})} \right] \times \frac{\alpha(\tilde{z}) - \alpha(0) e^{-\frac{2l_k}{l_\gamma} \int_0^{\tilde{z}} \varphi(\xi - z') dz'}}{1 + \alpha(0) e^{-\frac{2l_k}{l_\gamma} \int_0^{\tilde{z}} \varphi(\xi - z') dz'}}, \quad (34)$$

где

$$\alpha(\tilde{z}) = \frac{\varphi(\xi, \tilde{z}) + \frac{l_\gamma}{l_k} \frac{\varphi'(\xi, \tilde{z})}{2\varphi(\xi, \tilde{z})}}{\varphi(\xi, \tilde{z}) - \frac{l_\gamma}{l_k} \frac{\varphi'(\xi, \tilde{z})}{2\varphi(\xi, \tilde{z})}}. \quad (35)$$

Формула (34) тем точнее, чем меньше отношение $\frac{l_\gamma}{l_k}$. При соизмеримых l_γ и l_k характер приближения (34) может быть установлен путем сравнения с точным решением [7] для лоренцевой формы импульса накачки. Кривая 1 на рис. 1 взята из [1], а кривая 2 построена по (34). При сравнении кривых следует совместить абсциссы максимумов. В пределах полуширины импульса погрешность, даваемая (34), оказывается порядка 20%.

Обратимся к анализу предельного случая, когда $l_k \ll l_\gamma$. Как было показано в (21) и (23), для импульса (22) решение уравнения (30) в приближении заданного поля имеет вид

$$f(\tilde{z}, \xi) = \frac{l_k}{l_\gamma} \frac{1}{\pi} \{ \arctg \xi - \arctg(\xi - \tilde{z}) \}. \quad (36)$$

Это выражение аппроксимирует точное решение уравнения (30) при $z \ll l_\gamma$. Вернемся теперь к точному уравнению (30) и проанализируем его решение при $\tilde{z} \gg 1$. Заменой переменной $\tilde{z} = \frac{l_\gamma}{l_k} \tilde{x}$ уравнение (30) можно привести к виду

$$\frac{df}{d\tilde{x}} + f^2 = \varphi^2 \left(\xi - \frac{l_\gamma}{l_k} \tilde{x} \right). \quad (37)$$

Функция в правой части уравнения (37) отлична от нуля в интервале $\left(\tilde{x}_0 - \frac{l_k}{l_\gamma}, \tilde{x}_0 + \frac{l_k}{l_\gamma} \right)$, где $\tilde{x}_0 = \frac{l_k}{l_\gamma} \xi$, и интеграл от нее равен $\frac{l_k}{l_\gamma}$. Если это отношение достаточно мало, то функцию φ^2 можно считать

пропорциональной $\delta(\tilde{x} - \tilde{x}_0)$ -функции, тем самым приближенно представить уравнение (37) как

$$\frac{df}{d\tilde{x}} + f^2 = \frac{l_k}{l_\gamma} \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_0). \quad (38)$$

Нетрудно проверить, что функция

$$\frac{1}{\tilde{x} - \tilde{x}_0 + \frac{l_\gamma}{l_k}} [\Theta(\tilde{x}_0) - \Theta(\tilde{x}_0 - \tilde{x})]$$

удовлетворяет уравнению (38), а следовательно,

$$f(\tilde{z}, \xi) \approx \frac{l_k}{l_\gamma} [\Theta(\xi) - \Theta(\xi - \tilde{z})] \frac{1}{1 + \left(\frac{l_k}{l_\gamma}\right)^2 (\tilde{z} - \xi)}. \quad (39)$$

Сопоставляя (39) и (36), видим, что резкие изломы в точках $\xi=0$ и $\xi=\tilde{z}$ связаны с δ -аппроксимацией импульса накачки и должны быть заменены плавными кривыми в единичной окрестности этих точек. Из проведенного анализа следует, что с ростом параметра l_γ/l_k импульс второй гармоники деформируется так, что в пределе $\frac{l_\gamma}{l_k} \rightarrow \infty$ при до-

статочно большой длине кристалла ($z \gg l_k$) он практически не зависит от формы породившего его импульса накачки. При этом длительность импульса второй гармоники может значительно превосходить длительность импульса накачки.

Возбуждение второй гармоники при двумерном взаимодействии. В предыдущем разделе было рассмотрено удвоение частоты, когда волновые векторы накачки и гармоники коллинеарны, а в этом — анализируется случай, когда для возбуждения второй гармоники требуется две волны накачки. Такое возбуждение второй гармоники можно рассматривать как вырожденный случай оптического смешения ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$).

Пусть на границу ($z=0$) нелинейной недиссипативной среды под одинаковыми углами к нормали падают два импульса накачки, частота которых ω , с плоскими фазовыми фронтами (рис. 2). Пусть условие векторного (двумерного) синхронизма выполняется, когда падающие волны обыкновенные, а гармоника необыкновенная.

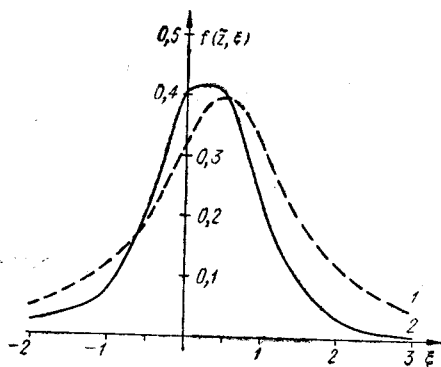


Рис. 1.

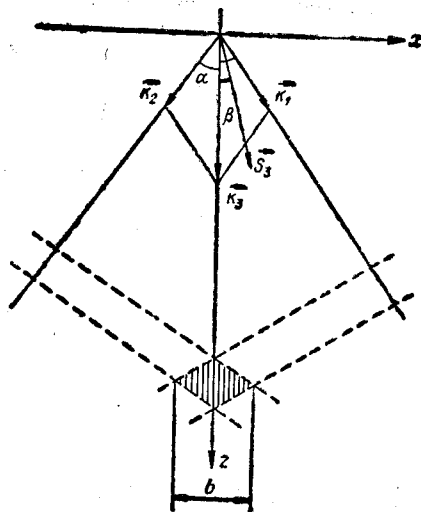


Рис. 2.

Учтем двулучепреломление кристалла и ограничимся только приближением заданного поля, так как каждая волна накачки, помимо участия в двумерном взаимодействии, коллинеарно возбуждает вторую гармонику, на создание которой тоже уходит энергия. Уравнение для комплексной амплитуды второй гармоники будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \operatorname{tg} \beta \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u_3 \cos \beta} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_3 = -i \gamma A_{10} A_{20}, \quad (40)$$

где β — угол между \vec{k}_3 и лучевым вектором \vec{S}_3 (см. рис. 2); $u_3 = \frac{d\omega_3}{dk}$ — групповая скорость импульса второй гармоники; $\gamma = \frac{4\pi(2\omega)^2}{2c^2 k_3 \cos^2 \beta} e_3 \chi e_1 e_2$ — нелинейная константа. Амплитуды волн накачки A_1, A_2 связаны со своими значениями $A_{10}(t) = A_{20}(t) = A_0 \varphi(t)$ ($\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$) на границе $z=0$ в точке $x=0$ соотношениями:

$$\begin{aligned} A_1(t, z, x) &= A_{10} \left(t - \frac{z \cos \alpha + x \sin \alpha}{u_1} \right); \\ A_2(t, z, x) &= A_{20} \left(t - \frac{z \cos \alpha - x \sin \alpha}{u_2} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь $u_1 \approx u_2$ — групповые скорости импульсов накачки. Подставляя (41) в (40) и интегрируя уравнение с учетом граничного условия $A_3|_{z=0} = 0$, найдем, что

$$\begin{aligned} A_3 &= -i \gamma \int_0^z dz' A_{10} \left[t - \frac{z}{u_3 \cos \beta} - \frac{x - z \operatorname{tg} \beta}{u_1} \sin \alpha + \right. \\ &+ \left. \left(\nu - \frac{\operatorname{tg} \beta}{u_1} \sin \alpha \right) z' \right] A_{20} \left[t - \frac{z}{u_3 \cos \beta} + \frac{x - z \operatorname{tg} \beta}{u_2} \sin \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left(\nu + \frac{\operatorname{tg} \beta}{u_2} \sin \alpha \right) z' \right], \end{aligned} \quad (42)$$

где $\nu = \frac{1}{u_3 \cos \beta} - \frac{\cos \alpha}{u_1}$. Из формулы (42) видно, что импульс гармоники имеет ограниченную апертуру $A_3(t, x, z)$, несмотря на то, что импульсы волн накачки имели бесконечный фазовый фронт. Это связано с тем, что размер области, в которой соответствующая компонента нелинейной поляризации отлична от нуля (см. ромбик на рис. 2), определяется длительностью τ импульса накачки, $b \sim \frac{2\tau u_1}{\sin \alpha}$. При $x > b$ подынтегральная функция резко убывает и амплитуда второй гармоники стремится к нулю. Распределение энергии по оси x может быть измерено экспериментально. Соответствующая функция, очевидно, пропорциональна интегралу

$$W(x) = \frac{1}{\gamma^2 A_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dt |A_3(t, x, l)|^2 \quad (43)$$

и определяется формой и длительностью импульса накачки. Проанализируем эту связь. Предположим, что параметр

$$\frac{l \operatorname{tg} \beta}{u_1} \sin \alpha \ll \tau; \quad (44)$$

тогда (43) можно представить в виде

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left| \int_0^l dz' \rho(t + \nu z', x) \right|^2, \quad (45)$$

причем

$$\rho(t, x) = \varphi(t - T) \varphi(t + T); \quad T = \frac{x \sin \alpha}{u_1}. \quad (46)$$

Переменные x и t в (46) разделяются только для импульсов гауссовой формы:

$$\varphi(t) = e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}; \quad \rho(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} e^{-\frac{2T^2}{\tau}} e^{-\frac{2t^2}{\tau^2}}; \quad W(x) \sim e^{-\frac{4T^2}{\tau^2}}.$$

Для всех остальных импульсов переменные x и t взаимозависимы. Интеграл под знаком модуля в (45) можно рассматривать как свертку распределения (46) с щелевой аппаратной функцией $B(z) = \Theta(z) \Theta(l - z)$, где $\Theta(z) = 1$, если $z \geq 0$, или $\Theta(z) = 0$, если $z < 0$.

Разберем два предельных случая: $\nu l \ll \tau$ ($l \ll l_k$) и $\nu l \gg \tau$. В первом случае «размер щели» много меньше распределения (46) и

$$W_1(x) \simeq l^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^2(t, x) dt = l^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \varphi^2(t - T) \varphi^2(t + T). \quad (47)$$

Во втором — размер «щели» много больше размеров, характеризующих распределение $\rho(t, x)$. Как видно из (46), $\rho(t, x)$ при фиксированном значении x имеет два максимума, расстояние между которыми порядка $2T$. Введем функцию

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t - T) \varphi(t + T) dt, \quad (48)$$

с помощью которой определим нормированное распределение

$$\rho_n(t, x) = \frac{1}{\sigma(x)} \rho(t, x). \quad (49)$$

Подставляя (49) в (45) и аппроксимируя $\rho_n(t, x)$ суммой двух δ -функций, сцентрированных соответственно в точках $t = \pm T$, получим

$$W_2(x) \simeq \frac{l}{\nu} \sigma^2(x). \quad (50)$$

В таблице приведены примеры $W(x)$, вычисленной по формулам (47) и (50) для некоторых импульсов. Откажемся теперь от предположения (44) и проанализируем роль двулучепреломления. При $\nu \gg \frac{\text{tg } \beta}{u_1} \sin \alpha$ двулучепреломление приведет к сдвигу распределения $W(x)$ на величину $x = l \text{tg } \beta$ без изменения его формы. Если $\nu \ll \frac{\text{tg } \beta}{u} \sin \alpha \equiv \delta$, то выражение для $W(x')$, где $x' = x - l \text{tg } \beta$, можно представить в виде

$$W(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left| \frac{1}{\delta} \int_{T'}^{T' + \delta l} dt' \varphi(t - t') \varphi(t + t') \right|^2. \quad (51)$$

$\varphi(t)$	$W_1(x)$	$W_2(x)$
Гауссов импульс $(\sqrt{\pi \tau})^{-1} \exp\left\{-\frac{t^2}{\tau^2}\right\}$	$\frac{l^2}{2\pi^3 \tau^3} \exp\left\{-4\frac{T^2}{\tau^2}\right\}$	$\frac{l}{2\pi \nu \tau^2} \exp\left\{-4\frac{T^2}{\tau^2}\right\}$
Дисперсионный импульс $\frac{1}{\pi \tau} \frac{1}{1 + \frac{t^2}{\tau^2}}$	$\frac{\tau l^2}{16\pi^3} \frac{5\tau^2 + T^2}{(\tau^2 + T^2)^3}$	$\frac{l}{4\pi^2 \nu \tau^2} \left(1 + \left(\frac{T}{\tau}\right)^2\right)^2$
Треугольный импульс $\begin{cases} \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right); \\ -\tau < t < 0 \\ \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right); \\ 0 < t < \tau \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{16}{15} \frac{l^2}{\tau^3} \left(1 + \frac{T}{\tau}\right)^5; \\ -\tau < T < 0 \\ \frac{16}{15} \frac{l^2}{\tau^3} \left(1 - \frac{T}{\tau}\right)^5; \\ 0 < T < \tau \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{16 l}{9 \nu \tau^2} \left(1 + \frac{T}{\tau}\right)^3; \\ -\tau < T < 0 \\ \frac{16 l}{9 \nu \tau^2} \left(1 - \frac{T}{\tau}\right)^3; \\ 0 < T < \tau \end{cases}$
Прямоугольный импульс $\begin{cases} \frac{1}{2\tau}; & -\tau < t < \tau \\ 0; & t > \tau \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{l^2}{8\tau^3} \left(1 + \frac{T}{\tau}\right); \\ -\tau < T < 0 \\ \frac{l^2}{8\tau^3} \left(1 - \frac{T}{\tau}\right); \\ 0 < T < \tau \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{l}{4\nu\tau^2} \left(1 + \frac{T}{\tau}\right)^2; \\ -\tau < T < 0 \\ \frac{l}{4\nu\tau^2} \left(1 - \frac{T}{\tau}\right)^2; \\ -\tau < T < 0 \end{cases}$

Здесь $T' = \frac{x'}{u_1} \sin \alpha$. Из (51) видно, что явление двулучепреломления приводит к уширению распределения $W(x')$, которое при $\delta l \gg \tau$ стремится к прямоугольной форме, простирающейся на область значений T примерно от нуля до $-\delta l$.

Заключение. Из проведенного анализа следует, что использование приближенных методов, предложенных в работе, позволяет решить ряд задач по взаимодействию импульсно-модулированных световых волн в нелинейных средах. Важнейшими параметрами, возникающими при взаимодействии импульсно-модулированных волн, являются расстройка групповых скоростей ν и отношение $\frac{l_T}{l_k}$. При одномерном взаимодействии с ростом параметра $\frac{l_T}{l_k}$ импульс второй гармоники деформируется так, что при $\frac{l_T}{l_k} \rightarrow \infty$ и большой длине кристалла ($z \gg l_k$) его форма практически не зависит от формы импульса накачки. При двумерном взаимодействии о форме, величине и длительности импульса второй гармоники можно судить по виду пространственного распределения $W(x)$.

Приложение

Рассмотрим вывод уравнения (7) для медленно меняющихся амплитуд. Очевидно, задача сводится к вычислению действия оператора

$$\hat{L} = \text{rot rot} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (1 + 4\pi \hat{\chi}) \quad (\text{П1})$$

на функцию

$$\vec{e} A(t, \vec{r}) e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} \quad (\text{П2})$$

с последующим умножением скалярно на $\vec{e} e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}$. Ограничиваясь первыми производными по \vec{r} от $A(t, \vec{r})$, найдем, что

$$e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} \vec{e} \text{rot rot} [e A e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}] = -\vec{e} [\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}) + i \nabla \times (\vec{k} \times \vec{e}) + i \vec{k} (\nabla \times \vec{e})] A = \{-e [\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e})] + 2i [\vec{e} \times (\vec{k} \times \vec{e})] \nabla\} A. \quad (\text{П3})$$

Мы воспользовались соотношением

$$\vec{e} [\vec{k} \times (\nabla \times \vec{e})] + \vec{e} [\nabla \times (\vec{k} \times \vec{e})] = -2 [\vec{e} \times (\vec{k} \times \vec{e})] \nabla.$$

Обратимся теперь к вычислению $\hat{\chi} E$:

$$\begin{aligned} \hat{\chi} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k} \chi(\omega_k) \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\omega_k t - \vec{k} \vec{r})} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k} \left[\chi(\omega) + \frac{\partial \chi}{\partial \omega} (\omega_k - \omega) + \dots \right] \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\omega_k t - \vec{k} \vec{r})} = \\ &= \chi(\omega) \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{\partial \chi}{\partial \omega} \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \omega \right) \vec{E}(\vec{r}, t) + \dots \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

Выписанные члены соответствуют линейному приближению теории дисперсии [10]. Дифференцируя равенство (П4) по времени и оставляя производные по A не выше первого порядка, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\chi} E &= -\omega^2 \hat{\chi} e A(\vec{r}, t) e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} + \\ &+ i \left(2\omega \hat{\chi} \vec{e} + \omega_0^2 \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \omega} \vec{e} \right) \frac{\partial}{\partial t} A(\vec{r}, t) e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}. \end{aligned} \quad (\text{П5})$$

Сопоставляя (П3), (П5) с (П1), получим следующий результат:

$$\begin{aligned} e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} \vec{e} \hat{L} e A(t, \vec{r}) e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} &\cong 2i [\vec{e} \times (\vec{k} \times \vec{e})] \nabla A + \\ &+ \frac{i}{c^2} \vec{e} \left(2\omega \vec{e} + 8\pi\omega \hat{\chi} \vec{e} + 4\pi\omega_0^2 \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \omega} \vec{e} \right) \frac{\partial A}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

При выводе (П6) мы воспользовались уравнением, связывающим волновые векторы и поляризации однородных волн в кристалле

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}) + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + 4\pi \hat{\chi}) \vec{e} = 0. \quad (\text{П7})$$

Умножая (П7) скалярно на \vec{e} и дифференцируя по \vec{k} , получим

$$2\omega \vec{e}^2 + 8\pi\omega \vec{e} \hat{\chi} \vec{e} + 4\pi\omega^2 \vec{e} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \omega} \vec{e} = 2c^2 \vec{S} [e \times (\vec{k} \times \vec{e})]. \quad (\text{П8})$$

Если теперь с помощью (П8) заменить слагаемое в круглых скобках равенства (П6), то мы придем к уравнению (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин. Нестационарные явления и пространственно-временная аналогия в нелинейной оптике.— ЖЭТФ, 1968, т. 55.
2. W. H. Glenn. Second-Harmonic Generation by Picosecond Optical Pulses.— IEEE, 1969, QE-5, № 6.
3. J. Comly, E. Garmire. Second Harmonic Generation from Short Pulses.— Appl. Phys. Lett., 1968, № 12.
4. Н. Бломберген. Нелинейная оптика. М., «Мир», 1966.
5. Г. В. Кривошеков, В. И. Строганов. Об одном способе измерения длительности сверхкоротких импульсов света.— В сб. «Нелинейные процессы в оптике». Новосибирск, «Наука», 1970.
6. Л. М. Овандер. Нелинейные оптические эффекты в кристаллах.— УФН, 1965, т. 86, вып. 1.
7. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М., «Наука», 1965.
8. В. Л. Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Физматгиз, 1960.
9. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов. Проблемы нелинейной оптики. М., Изд-во АН СССР, 1964.
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
11. D. Kleinman. Theorie of Second Harmonic Generation.— Phys. Rev., 1962, v. 128.
12. С. Г. Раутиан. Реальные спектральные приборы.— УФН, 1958, т. 66.
13. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
14. Л. Бриллюэн, М. Пароди. Распространение волн в периодических структурах. М., Изд-во иностр. лит., 1959.

*Поступила в редакцию
17 августа 1970 г.*
