АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1969

УДК 621.317.32

Л. И. ВОЛГИН
(Таллин)

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОГО ЗНАЧЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Самым распространенным объектом измерения и контроля в области радиоэлектроники и электротехники является эффективное значение напряжений (токов), характеризующее мощность электрических сигналов и по энергетическому воздействию являющееся эквивалентом постоянного напряжения (тока). При этом из-за многообразия видов сигналов необходимо измерять эффективное значение напряжений (ЭЗН) произвольной формы в широком диапазоне частот [1]. В настоящей работе рассматривается способ измерения ЭЗН произвольной формы [2], в основу которого положен метод статистических испытаний [3]. Как будет показано ниже, использование метода статистических испытаний позволяет обеспечить измерение ЭЗН произвольной формы с большим коэффициентом амплитуды в диапазоне от инфранизких до ультравысоких частот. Возможность использования метода статистических испытаний для измерения ЭЗН непосредственно вытекает из геометрической модели квадрата эффективного значения сигнала $u=u(t)$. В отличие от способов измерения ЭЗН путем обработки мгновенных значений сигнала [4] рассматриваемый метод базируется на многократном сравнении мгновенных значений сигнала со случайной величиной.

Рассмотрим геометрическую модель квадрата эффективного значения электрического сигнала, изменяющегося во времени по закону $u=u(t)$. Объем v тела, ограниченного двумя плоскостями, проходящими перпендикулярно оси времени через точки t_1 и $t_1+\Delta t$, и четырьмя цилиндрическими поверхностями, образующие которых составляют квадрат со сторонами $\alpha u(t)$, параллельный указанным плоскостям, и квадрат эффективного значения U определяются соответственно выражениями:

$$v = 4 \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} u^2(t)\,dt; \quad U^2 = \frac{1}{nT} \int_{t_1}^{t_1+nT} u^2(t)\,dt,$$

где n есть любое целое положительное число, не равное нулю; T — период функции $u(t)$. Не сужая общности задачи, будем считать, что $t_1=0$. Выразив объем v через U, можем записать

$$v = 4\,n\,T\,U^2\,(1+\delta_{\text{н}}) \text{ или } v = 4\,(n+1)\,T\,U^2\,(1-\delta_{\text{и}}), \tag{1}$$

где

$$\delta_{н} = \frac{\int\limits_{nT}^{nT+\{\Delta t/T\}T} u^2(t)\,dt}{\int\limits_{0}^{nT} u^2(t)\,dt}; \quad \delta_{и} = \frac{\int\limits_{nT+\{\Delta t/T\}T}^{(n+1)T} u^2(t)\,dt}{\int\limits_{0}^{(n+1)T} u^2(t)\,dt} \tag{2}$$

— соответственно относительные погрешности определения объема v через величину U с недостатком и избытком, обусловленные некратностью значений Δt и T. Здесь $n=[\Delta t/T]$ и $\{\Delta t/T\}$ — соответственно целая и дробная часть отношения $\Delta t/T$. Воспользовавшись теоремой о среднем [5], выражения (2) можно представить в следующем виде:

$$\delta_{н} = \frac{1}{n}\,\frac{u^2(t_0)}{U^2}\left\{\frac{\Delta t}{T}\right\} < \frac{k_{а}^2}{n}; \quad \delta_{и} = \frac{1}{n+1}\,\frac{u^2(t_0)}{U^2}\left\{n+1-\frac{\Delta t}{T}\right\} < \frac{k_{а}^2}{n+1}, \tag{3}$$

где t_0 — некоторое значение, принадлежащее промежутку $nT \leqslant t \leqslant nT + \left\{\frac{\Delta t}{T}\right\}$; $k_{а}$ — коэффициент амплитуды, равный отношению амплитудного и эффективного значений сигнала $u(t)$. Выражения (3) показывают, что при $\{\Delta t/T\}=0$ погрешности $\delta_{н}$, $\delta_{и}$ равны нулю, а при $\Delta t \gg T$ $(n \gg 1)$ $\delta_{н}, \delta_{и} \ll 1$ и с увеличением Δt могут быть сведены к сколь угодно малой величине. При работе в режиме $n \gg 1$ неравенство $\delta < k_{а}^2/n$ позволяет по допустимой погрешности от некратности значений Δt и T определить требуемое количество периодов. Например, при $k_{а} = \sqrt{2}$ (синусоидальный сигнал) и допустимой погрешности $\delta=0{,}01$ (1%) получим $n=200$. Таким образом, при выполнении условия $\Delta t \gg T$ с любой степенью точности можем считать, что

$$v=4\Delta t U^2, \tag{4}$$

где $\Delta t \simeq nT$. Для стационарных случайных сигналов, обладающих свойством эргодичности, приведенные формулы остаются в силе, если под величиной T подразумевается время корреляции, по истечении которого корреляционная функция случайного центрированного процесса $u(t)$ затухает до пренебрежимо малого значения.

Рассмотрим, чему равна вероятность p попадания случайной точки $x(u_1, u_2, t)$, координаты которой независимы, внутрь или на поверхность тела, определяющего объем v. Величины u_1 и u_2 имеют равномерный закон распределения плотности вероятности и могут изменяться в ограниченных пределах $|u_1| \leqslant U_{м}$, $|u_2| \leqslant U_{м}$. Тогда на отрезке времени Δt точка x заведомо попадает в прямоугольный параллелепипед с объемом $V = 4\,\Delta t\, U_{м}^2$. Вероятность попадания точки x с равномерным законом распределения внутрь или на поверхность тела с объемом v определяется выражением

$$p = \frac{v}{V} = \frac{1}{\Delta t\, U_{м}^2}\int\limits_0^{\Delta t} u^2(t)\,dt = \frac{U^2}{U_{м}^2}. \tag{5}$$

С другой стороны, при достаточно большом количестве испытаний N частота попадания точки описывается соотношением

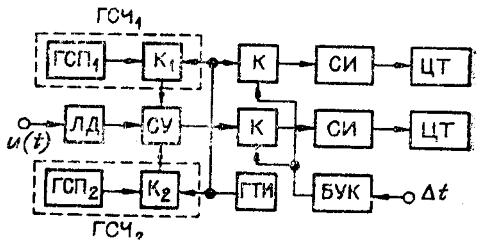
$$\bar{p} = \frac{m}{N} \approx p, \tag{6}$$

где m — количество попаданий точки x внутрь или на поверхность тела с объемом v. С учетом (5) и (6) окончательно запишем

$$m = \frac{N}{U_м^2} U^2 = k\,U. \qquad (7)$$

Равенство (7) показывает, что метод статистических испытаний может быть использован для измерения ЭЗН произвольной формы. При этом измеряемый сигнал может быть как детерминированным, так и случайным.

На рисунке изображена структурная схема вольтметра, реализующая рассмотренный способ измерения ЭЗН. Измеряемое напряжение $u(t)$ выпрямляется линейным безынерционным детектором ЛД. С выхода ЛД абсолютное значение $u(t)$ сигнала подается на первый вход сравнивающего устройства СУ. На два других входа СУ от генераторов случайных чисел ГСЧ$_1$ и ГСЧ$_2$ поступают две синхронные последовательности однополярных импульсов $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Генераторы случайных чисел состоят из генераторов случайных процессов ГСП$_1$, ГСП$_2$ и ключей К$_1$, К$_2$. Ключи К$_1$, К$_2$ открыты в течение действия на их управляющих входах коротких импульсов, поступающих от генератора тактовых импульсов ГТИ. Амплитуды импульсов u_1 и u_2 являются случайными независимыми величинами с равномерным законом распределения плотности вероятности. Сравнивающее устройство выполняет следующие логические операции. Если в момент поступления на СУ очередной пары синхронных импульсов выполняется условие $|u(t_i)| \geqslant v_1(t_i) \wedge u_2(t_i)$, то на выходе СУ появляется импульс нормированной амплитуды. При $|u(t_i)| < u_1(t_i) \vee u_2(t_i)$ импульс на выходе СУ отсутствует. Таким образом, наличие или отсутствие импульса на выходе СУ в момент сравнения определяется выражением



$$\beta_i = \begin{cases} 1 \text{ при } |u| \geqslant u_1 \wedge u_2; \\ 0 \text{ при } |u| < u_1 \vee u_2 \end{cases} \qquad (8)$$

(здесь $\wedge$ и $\vee$ — знаки логической связи, имеющие смысл союзов «И», «ИЛИ» соответственно). Общее количество импульсов $m = \sum_{i=1}^{N} \beta_i$ на выходе СУ за время Δt, в течение которого открыты ключи К, регистрируется счетчиком импульсов СИ и индицируется на цифровом табло ЦТ. Общее количество сравнений N (количество импульсов, поступивших от ГТИ) за время Δt регистрируется другим счетчиком импульсов. Интервал времени (время усреднения) задается с помощью блока управления ключами БУК. При некотором усложнении логики СУ детектор ЛД может быть устранен. При этом СУ должно выполнять следующие операции. При $u(t)>0$ наличие или отсутствие импульса на выходе СУ определяется выражением (8). При $u(t)<0$ наличие или отсутствие импульса описывается формулой

$$\beta_i = \begin{cases} 1 \text{ при } u \leqslant u_1 \wedge u_2; \\ 0 \text{ при } u > u_1 \vee u_2. \end{cases} \qquad (9)$$

Здесь неравенства понимаются в алгебраическом смысле. В данном варианте знаки каждой сопряженной пары $u_1(t_i)$ и $u_2(t_i)$ случайных чисел одинаковы, а полярности амплитуд в последовательности импульсов должны с равной вероятностью изменяться. Из последнего условия вытекает, что синхронная последовательность пар случайных чисел u_1, u_2 может быть знакочередующейся.

Рассмотрим, при каких условиях обеспечивается равномерный закон распределения плотности вероятности временной координаты точки x. При работе в режиме $\Delta t \gg T$ возможны два варианта. В первом варианте положение сопряженной пары импульсов $u_1(t_i)$, $u_2(t_i)$ на временной оси в каждом элементарном интервале времени $(\Delta t/N)_i$ должно быть случайным и подчиняться равномерному закону распределения плотности вероятности. Назовем величину $T_к = \Delta t/N$ квазипериодом последовательности сопряженных пар импульсов. Во втором варианте положение пар импульсов $u_1(t_i)$, $u_2(t_i)$ на временной оси может быть детерминированным. Но каждая последующая пара импульсов должна быть сдвинута во времени относительно квазипериода $\Delta t/N$ на некоторую величину $\Delta\tau \ll T_к$. Данный способ квантования во времени используется в стробоскопических устройствах. Например, при формировании стробирующих импульсов (эту функцию в приведенной схеме выполняет ГТИ) с помощью быстрой и медленной пилы [6] моменты появления пар импульсов определяются выражением

$$t_i = \frac{T_к}{1 - \frac{T_к}{T_м}}(i-1) \approx T_к\left(1 + \frac{T_к}{T_м}\right)(i-1); \quad i = 1, 2, \ldots, N. \quad (10)$$

Здесь $T_к = \Delta t/N$ — период повторения быстрой пилы; $T_м = \Delta t = NT_к$ — период повторения медленной пилы. В обоих вариантах в зависимости от отношения $T_к/T \geqslant 1$ сравнение происходит в среднем через $\frac{T_к}{T} - 1$ периодов. При $T_к/T < 1$ в течение каждого периода сигнала $u(t)$ происходит в среднем $T/T_к$ сравнений. Если измеряемый сигнал является случайным процессом, то последовательность сопряженных пар импульсов может быть периодической. Верхняя граница частотного диапазона определяется длительностью $\tau_и$ сопряженных пар импульсов, так как должно выполняться условие $\tau_и \ll T$.

В диапазоне инфранизких частот используется режим уравнивания времени усреднения Δt и периода T сигнала $u(t)$ [7]. Здесь последовательность сопряженных пар импульсов при достаточно большом N может быть периодической. Отметим, что при отключении в схеме одного из генераторов случайных чисел количество импульсов m будет пропорционально средневыпрямленному значению сигнала $u(t)$, т. е. $m = N\,U_{ср}/U_м$.

Возможен другой способ построения вольтметров эффективных значений с использованием только одной последовательности случайных чисел u_1. Структурная схема такого устройства совпадает с представленной на рисунке, если в нем устранить генератор случайных чисел ГСЧ$_2$. Покажем, что при линейном законе распределения плотности вероятности $p(u_1) = 2u_1/U_м^2$ $(0 \leqslant u_1 \leqslant U_м)$ выражение (7) остается в силе. Вероятность того, что амплитуда импульса $u_1(t)$ не превысит значения $u(t)$ определяется выражением

$$P(u_1 \leqslant |u|) = \int_0^{|u|} p(u_1)\,du_1 = \frac{u^2(t)}{U_м^2}. \quad (11)$$

Усредненное за время Δt значение $P(u_1 \leqslant |u|)$ составляет

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_0^{\Delta t} P(u_1 \leqslant |u|)\, dt = \frac{U^2}{U_{\text{м}}^2} \tag{12}$$

(при условии, что $\Delta t \gg T$ или $\{\Delta t/T\} = 0$). Количество импульсов за время Δt на выходе СУ равно $m = P_{\text{ср}} N$. Подставив сюда выражение (12), получим формулу (7).

Представление о точности метода статистических испытаний дается в [3, 8]. Методическая погрешность, обусловленная конечным количеством испытаний N, определяется формулой [3]

$$\varepsilon = t_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}. \tag{13}$$

Здесь t_α — значение критического интервала, определяемое из таблиц нормального распределения по заданной доверительной вероятности α; p — математическое ожидание частоты $\bar{p}$ при $N \to \infty$. Например, при $N = 9800$, $p = 0{,}5$ погрешность равна $\varepsilon = 0{,}01$ (1%) с достоверностью $\alpha = 0{,}95$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ф. Клисторин. Цифровые вольтметры действующих значений.— Автометрия, 1966, № 2.
2. Л. И. Волгин. Исследование и разработка методов и аппаратуры для измерения эффективного значения напряжений произвольной формы. Автореферат дисс. Л., 1964.
3. Н. П. Бусленко, Ю. А. Шрейдер. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация на цифровых вычислительных машинах. М., Физматгиз, 1961.
4. И. Ф. Клисторин, И. И. Коршевер. Методы определения интегральных характеристик переменных напряжений путем обработки их мгновенных значений.— Автометрия, 1967, № 2.
5. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 1. М., Гостехиздат, 1953.
6. А. В. Иочис. О возможности применения стробоскопического преобразования сигналов для измерения действующего значения напряжения.— Труды научно-технической конференции «Радиоэлектроника». Каунас, КПИ, 1968.
7. Л. И. Волгин. Вольтметр инфранизкой частоты. Авторское свидетельство № 213975.— ИПОТЗ, 1968, № 11.
8. М. И. Ланин, С. М. Мандельштам. О применении метода статистических испытаний (Монте-Карло) для измерения среднего значения быстропеременных величин.— Применение кибернетики в электроизмерительной технике. М., ЦИНТИПриборэлектропром, 1963.

Поступила в редакцию
31 января 1968 г.,
окончательный вариант —
30 апреля 1969 г.