А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 6 1969

ЦИФРОВЫЕ ПРИБОРЫ И УСТРОЙСТВА

УДК 621.317.08

Г. И. САЛОВ

(Новосибирск)

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ МНОЖЕСТВОМ РЕЛЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СО СЛУЧАЙНЫМ ПОРОГОМ СРАБАТЫВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ МЕШАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

ВВЕДЕНИЕ

В [1, 2] рассматривается точечная оценка α^* измеряемой величины α, получаемая экспериментом с применением множества релейных элементов. Порог срабатывания каждого из элементов является случайной величиной (как результат несовершенства изготовления элементов и наличия флуктуаций в деталях последних), зависящей от неизвестного мешающего параметра β. Показывается, что при некоторых достаточных условиях точность оценки α^* можно повышать путем увеличения числа элементов. Повышение точности основано на привлечении (известных с точностью до β) функций распределения вероятностей порогов срабатывания, на создании и использовании различий в зависимостях последних от β. В [1] и [2] предполагается, что множество элементов состоит из двух подмножеств, каждое из которых имеет свое распределение вероятностей, одно и то же для всех его элементов. Тогда оценка α^* является функцией от числа сработавших элементов в этих подмножествах: $\alpha^*=v(\eta_1, \eta_2)$.

Точечная оценка α^* имеет тот недостаток, что, наверное, не совпадает с истинным значением α. Поэтому часто необходимо строить пределы α_1 и α_2, где $\alpha_1<\alpha_2$, зная η_1 и η_2, и определять, как можно точнее, вероятность (коэффициент доверия) того, что интервал $[\alpha_1, \alpha_2]$ содержит α.

Отметим еще следующее. Для каждой пары возможных значений α и β вероятность того, что хотя бы в одном из подмножеств сработают все элементы или не сработает ни один, может иметь, вообще говоря, положительную величину. Это, как отмечалось в [2], создает трудность в выборе значений оценки α^* для таких крайних исходов и, следовательно, в вычислении общих характеристик точности последней. В способе отыскания α_1, α_2 и соответствующих доверительных вероятностей, который будет рассматриваться ниже, также участвует некоторая функция от η_1, η_2 (статистика), близкая к точечной оценке. Но, как это будет видно в дальнейшем, достаточно, чтобы эта функция была определена лишь с точностью до неравенств. Последнее более или менее легко сделать с помощью оценки максимального правдоподобия для α [1, 2] и прямым перебором возможных неравенств для крайних исходов. Итак, интервальная оценка является в определенном смысле и *более совершенной.*

Доверительный интервал $[\alpha_1, \alpha_2]$ может строиться так, например, чтобы при любых α и β вероятность истинному значению α принадлежать $[\alpha_1, \alpha_2]$ была не меньше $1-\varepsilon$, где $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ — выбранное число.

Как в [1 и 2], здесь мы придерживаемся обычного теоретико-вероятностного способа рассуждений, включая отдельную реализацию множества элементов и измерительного эксперимента в совокупность подобных ей реализаций и заменяя утверждение об этой индивидуальной реализации утверждениями о всей совокупности. Для любой же частной реализации утверждение $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ либо справедливо, либо ложно. Однако если имеется длинная последовательность реализаций множества элементов и однократных экспериментов и по каждому наблюденному значению (η_1, η_2) вычисляется α_1, α_2 и утверждается, что $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$, то при этом отношение ошибочных утверждений к общему числу последних будет равно (с точностью до случайных колебаний) ε.

Доверительный интервал в широком классе случаев можно построить, применяя теорему Л. Н. Большева [3, 4].

Чтобы как-то проследить повышение коэффициента доверия путем реализации измерительного эксперимента, исследуемого в [1, 2], обратимся сначала к общеизвестной схеме совпадений, рассмотрение которой представляет и самостоятельный интерес.

1. ОБЩЕИЗВЕСТНАЯ СХЕМА СОВПАДЕНИЙ

Обычно на каждое из l требуемых значений сравнения устанавливают порог срабатывания только одного релейного элемента.

Пусть изготовление элементов, настройка порогов при $\beta=0$ (если таковая имеется) производятся независимо от элемента к элементу и процесс этот технологически установившийся. Тогда при $\beta=0$ пороги срабатывания элементов $\zeta_{10}, \ldots, \zeta_{i0}, \ldots, \zeta_{l0}$ являются независимыми случайными величинами.

Когда же $\beta \neq 0$, для порога срабатывания i-го элемента ζ_i, очевидно, справедливо

$$\zeta_i = \zeta_{i0} + \varphi_i(\beta, \zeta_{i0}) \quad (i = 1, \ldots, l). \tag{1}$$

В первом приближении φ_i может быть вполне определенной функцией от β, ζ_{i0}. При более точном приближении нужно считаться с ее способностью принимать от реализации к реализации элемента различные значения и рассматривать φ_i как случайную функцию.

В первом варианте при заданном β случайные величины $\zeta_1, \ldots, \ldots, \zeta_i, \ldots, \zeta_l$ всегда независимы. Чтобы последнее имело место для всех возможных β и во втором варианте, достаточно независимости φ_i от ζ_{j0} и $\varphi_j\ (j \neq i)$.

Везде ниже предполагается, что ζ_i суть независимые случайные величины с известными функциями распределения $G_i\,(x; \beta)$. Точнее

$$P\{\zeta_i \leqslant x \mid \beta = y\} = G_i\,(x; y).$$

Как известно, для рассматриваемой схемы оценка измеряемой величины α (в терминологии статьи [4] — значения функции $u(\alpha, \beta) \equiv \alpha$) производится на основании наблюденного числа сработавших элементов η. Предположим, что величине α ставится в соответствие статистика $\xi = v(\eta)$, представляющая собой возрастающую функцию числа сработавших элементов.

Обозначим через $G(x;\ \alpha,\ \beta)$ функцию распределения ξ, соответствующую произвольным α и β, т. е.

$$P\,\{\xi \leqslant x \,|\, \alpha = y_1, \beta = y_2\} = G\,(x;\ y_1,\ y_2). \qquad (2)$$

Теорему Л. Н. Большева можно использовать в случае монотонности по переменной α функций

$$f(x;\ \alpha) = \inf G(x-0;\ \alpha,\ \beta);\ F(x;\ \alpha) = \sup G(x;\ \alpha,\ \beta), \qquad (3)$$

где нижняя (верхняя) грань берется по всем возможным значениям β, а для $G(x-0;\ \alpha,\ \beta)$ справедливо то же определение, что и для $G(x;\ \alpha,\ \beta)$, но в фигурных скобках (2) необходимо поставить уже знак $<$.

Покажем, что здесь $f(x;\ \alpha)$ и $F(x;\ \alpha)$ — невозрастающие функции от α для всякого $x = \mathrm{const}$.

Если через $[v^{-1}(x)]$ обозначить наибольшее целое число такое, что $v([v^{-1}(x)])$ меньше (меньше или равно) x, то вероятность $P\{\xi < x\}$ $[P\,\{\xi \leqslant x\}]$ равна вероятности $P\{\eta \leqslant [v^{-1}(x)]\}$. Число всех возможных исходов эксперимента с $\eta \leqslant [v^{-1}(x)]$ есть $\sum\limits_{s=0}^{[v^{-1}(x)]} C_l^s$. Так как эти исходы попарно несовместны, то вероятность $P\{\eta \leqslant [v^{-1}(x)]\}$ равна сумме вероятностей η оказаться равным $0, 1, \ldots, [v^{-1}(x)]$. Учитывая сказанное, имеем

$$G\,(x;\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{l}\,[1 - G_i\,(\alpha;\beta)] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{[v^{-1}(x)]} \ \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_s \leqslant l} \ \prod_{k=1}^{s} G_{j_k}(\alpha;\beta) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \ldots, j_s}}^{l} [1 - G_i\,(\alpha;\beta)], \qquad (4)$$

где предполагается, что $1 \leqslant [v^{-1}(x)] \leqslant l$.

Удобной математической моделью события вероятности (4) является множество точек $G(\alpha)$ l-мерного пространства (где i-я координата соответствует порогу срабатывания i-то элемента), таких, что самое большее только $[v^{-1}(x)]$ любых их координат меньше или равны α. Ясно, что для любых $\alpha' < \alpha''$ каждая точка множества $C(\alpha'')$ принадлежит и множеству $C(\alpha')$. Следовательно, для вероятностных мер этих множеств справедливо

$$P\,\{C\,(\alpha')\} \geqslant P\,\{C\,(\alpha'')\}, \qquad (5)$$

т. е. с ростом α функции $G(x-0;\ \alpha,\ \beta)$ и $G(x;\ \alpha,\ \beta)$ не возрастают. Значит, с ростом α обе функции $f(x;\ \alpha)$ и $F(x;\ \alpha)$ также не возрастают.

Итак, можно воспользоваться упомянутой теоремой. Она утверждает [4], что если при любом η функции $f\,[v(\eta);\ \alpha]$ и $F\,v(\eta);\ \alpha]$ невозрастающие по переменной $\alpha \in A$ (A — замкнутое множество возможных значений α), то нижний [верхний] доверительный предел $\alpha_1\,[\alpha_2]$ для величины α, имеющий коэффициент доверия не менее $1 - \varepsilon_1\,[1 - \varepsilon_2]$, определяется как верхняя [нижняя] грань таких значений $\alpha \in A$, для которых выполняется неравенство

$$f\,(v\,(\eta);\alpha) \geqslant 1 - \varepsilon_1 \ \ [F\,(v\,(\eta);\alpha) \leqslant \varepsilon_2]. \qquad (6)$$

При этом, если решение соответствующего неравенства на множестве A не существует, то формально следует положить $\alpha_1\,[\alpha_2]$ равным нижнему [верхнему] возможному значению α.

Отметим еще, что если множество B возможных значений β состоит из одного известного элемента, например $\beta=0$, то найденные значения α_1, α_2 соответствуют ситуации с отсутствием мешающего воздействия.

Согласно определению $v(\eta)$, (3) и (4), для рассматриваемой схемы имеет место

$$f(v(\eta);\alpha)=\inf_{\beta\in B}\Big\{\prod_{i=1}^{l}[1-G_i(\alpha;\beta)]+\sum_{s=1}^{\eta-1}\sum_{1\leqslant j_1<\dots<j_s\leqslant l}\prod_{v=1}^{s}G_{j_r}(\alpha;\beta)\times$$

$$\times\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j_1,\dots,j_s}}^{l}[1-G_i(\alpha;\beta)]\Big\}\ (1\leqslant\eta\leqslant l); \qquad (7)$$

$$F(v(\eta);\alpha)=\sup_{\beta\in B}\Big\{\prod_{i=1}^{l}[1-G_i(\alpha;\beta)]+\sum_{s=1}^{\eta}\sum_{1\leqslant j_1<\dots<j_s\leqslant l}\prod_{r=1}^{s}G_{j_r}(\alpha;\beta)\times$$

$$\times\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j_1,\dots,j_s}}^{l}[1-G_i(\alpha;\beta)]\Big\}\ (0\leqslant\eta\leqslant l-1). \qquad (8)$$

Отыскание α_1 и α_2 при заданных ε_1 и ε_2 трудоемко, но вычисление $1-\varepsilon_1$ и $1-\varepsilon_2$ для выбранных α_1 и α_2 может быть существенно проще.

Пример 1. Пусть в (1) независимые случайные величины $\zeta_{j0}(i=1,\dots,10)$ имеют нормальное распределение $\Phi(x-2{,}5-5i)$ с математическим ожиданием $2{,}5+5i$ и дисперсией 1, а $\varphi_i=\gamma_i\beta$, где γ_i — случайные величины, независимые между собой и от ζ_{j0} $(j=1,\dots,10)$ и имеющие (для простоты) одно и то же нормальное распределение $\Phi(x)$. В таком случае ζ_i суть независимые случайные величины, подчиняющиеся нормальным распределениям $\Phi\left((x-2{,}5-5i)/\sqrt{1+\beta^2}\right)$ соответственно. Пусть $1<\beta\leqslant 1$.

Для $1\leqslant\eta\leqslant l-1$, с практической точки зрения, представляет интерес доверительный интервал $[5\eta,\ 5\eta+10]$. Так как в данном примере $G'_{ix}(x;\beta)>0$ для всех x, то, как это следует из (5), с ростом α обе функции $f(v(\eta);\alpha)$ и $F(v(\eta);\alpha)$ монотонно убывают. Поэтому, согласно (6), для $\alpha_1=5\eta$ и $\alpha_2=5\eta+10$ имеет место $1-\varepsilon_1=f(v(\eta);\ 5\eta)$ и $\varepsilon_2=F(v(\eta);\ 5\eta+10)$. Когда $\eta=1$, принимая во внимание (7) и (8), получаем:

$$1-\varepsilon_1=f(v(1);5)=\inf_{-1\leqslant\beta<1}\prod_{i=1}^{10}\left[1-\Phi\left(\frac{2{,}5-5i}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)\right]\approx$$

$$\approx\inf_{-1<\beta<1}\left[1-\Phi\left(\frac{-2{,}5}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)\right]=\Phi\left(\frac{2{,}5}{\sqrt{2}}\right)\approx 0{,}96145;$$

$$\varepsilon_2=F(v(1);15)=\sup_{-1\leqslant\beta<1}\left\{\prod_{i=1}^{10}\left[1-\Phi\left(\frac{12{,}5-5i}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{10}\Phi\left(\frac{12{,}5-5j}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{10}\left[1-\Phi\left(\frac{12{,}5-5i}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)\right]\right\}\approx$$

$$\approx\sup_{-1\leqslant\beta\leqslant 1}\prod_{i=2}^{3}\left[1-\Phi\left(\frac{12{,}5-5i}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)\right]=\Phi\left(\frac{-2{,}5}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{2{,}5}{\sqrt{2}}\right)\approx 0{,}037064,$$

и, значит, $1-\varepsilon_1-\varepsilon_2\approx 0{,}92439$.

Таким же образом могут быть рассмотрены и остальные исходы. Так, например, для всех значений $2\leqslant\eta\leqslant 8$ принятые доверительные пределы имеют $\varepsilon_1\approx\varepsilon_2\approx 0{,}037064$ и $1-\varepsilon_1-\varepsilon_2\approx 0{,}92587$.

2. ПРИМЕНЕНИЕ БОЛЬШЕГО ЧИСЛА РЕЛЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ОБЪЕДИНЕННЫХ В ОТДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

Случай одной и той же для всех элементов каждого множества функции распределения порогов. Теперь обратимся к измерительному эксперименту с бо́льшим числом релейных элементов, причем объединенных в несколько множеств. Чтобы внести некоторую ясность относительно полезности использования, даже в случае маломощных множеств, элементов с разной зависимостью их порогов от мешающего воздействия, вначале рассмотрим эксперимент, где пороги всех n_i элементов i-го множества имеют одну и ту же функцию распределения $G_i(x; \beta)$ $(i=1, \ldots, l)$. Функции распределения $G_i(x; \beta)$ отличаются друг от друга, по крайней мере, соответствующими им математическими ожиданиями.

Ясно, что наиболее полную информацию об измеряемой величине α получаем при учете числа сработавших элементов во всех множествах. Однако здесь представляется возможным значительно уменьшить вычислительную работу, оценивая α по числу сработавших элементов в одном или двух множествах. При оценке α по числу сработавших элементов $\eta_i=k$ во множестве i выражение для $G(v(k)-0; \alpha, \beta)$ $[G(v(k); \alpha, \beta)]$ имеет вид левой части равенства (12) [(13)] работы [5] с очевидной заменой.

Пример 2. $G_i(x; \beta) = \Phi\left(\dfrac{x-m_i}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)$ $(-1 \leqslant \beta \leqslant 1)$; $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0{,}025$ $(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2=0{,}95)$. В табл. 1 приведены α_1-m_i и α_2-m_i, соответствующие $\eta_i \leqslant n_i/2$ при $n_i=4$ и 8. Доверительные пределы для $\eta_i > n_i/2$ определяются здесь из соотношения $\alpha_1(k) = 2m_i - \alpha_2(n_i-k)$ $(0 \leqslant k \leqslant n_i)$.

Таблица 1

n_i	η_i/n_i				
	0	1/8	1/4	3/8	1/2
4	0,366 —	— —	1,221 −3,553	— —	2,108 −2,108
8	−0,335 —	0,096 −3,886	0,549 −2,619	0,976 −1,941	1,424 −1,424

Случай двух независимых функций распределения. Рассмотрим теперь ситуацию, где множество $i(i=1, \ldots, l)$ состоит из двух подмножеств, каждое из которых имеет свою функцию распределения порогов срабатывания G_{ij} $(x; \beta)$ $(j=1, 2)$, одну и ту же для всех его n_{ij} элементов.

Будем считать выполненными два условия: 1) как и выше, при каждом $\beta \in B$ пороги срабатывания релейных элементов суть независимые случайные величины; 2) для любого из l множеств в случае $1 \leqslant \eta_j \leqslant n_j-1$ $(j=1,2)$ (индекс i здесь и ниже опущен ради удобства) существует асимптотически эффективная оценка максимального правдоподобия величины α, получаемая по наблюденному значению (η_1, η_2) [1, 2].

Числа сработавших в результате эксперимента элементов в подмножествах образуют двумерную случайную величину (η_1, η_2) с распределением

$$P\{\eta_1=k_1, \eta_2=k_2 \mid \alpha=x, \beta=y\} = \prod_{j=1}^{2} C_{n_j}^{k_j}[G_j(x; y)]^{k_j} \times$$
$$\times [1-G_j(x, y)]^{n_j-k_j} = p_1(k_1; x, y)\, p_2(k_2; x, y), \qquad (9)$$

где n_j — число элементов в подмножестве j. Задача заключается в построении доверительных пределов для α по наблюденному значению теперь уже (η_1, η_2). Как прежде, величине α ставится в соответствие статистика $\xi = v(\eta_1, \eta_2)$.

Рассмотрим ее функцию распределения. Она равна сумме вероятностей появления всех тех пар k_1 и k_2 (возможных значений η_1 и η_2), которым соответствует ξ, меньшее или равное x, т. е. таких, что $v(k_1,k_2) \leqslant x$. Из физического смысла задачи вытекает, что для каждого фиксированного $k_2 v(k_1, k_2)$ должна быть возрастающей функцией от k_1 и наоборот. Поэтому, если для фиксированных значений k_1 и x существует такое значение $k_2 = k_2(k_1, x)$, что $v(k_1, k_2(k_1, x)) < x$, то для всех $k_2 < k_2(k_1, x)$ справедливо $v(k_1, k_2) < x$. Отсюда заключаем, согласно (9), что

$$G(x-0; \alpha, \beta) = \sum_{s=0}^{k} p_1(s; \alpha, \beta) \sum_{r=0}^{q_s} p_2(r; \alpha, \beta), \tag{10}$$

где k и s — наибольшие целые числа, такие, что справедливо $v(k, 0) < x$ и $v(s, q_s) < x$ соответственно.

Доказательство того, что и в этом случае функции (3) не возрастают по переменной α, точно такое же, как в п. 1. Нужно рассматривать возможные значения порогов срабатывания элементов как точки в (n_1+n_2)-мерном пространстве и определять множество $C(\alpha)$ точек этого пространства так, что не более чем k_1 среди n_1 первых и k_2 среди n_2 последних координат каждой его точки меньше или равны α, где пара k_1 и k_2 удовлетворяет неравенству $v(k_1, k_2) < x$ или $v(k_1, k_2) \leqslant x$.

Пример 3. Разобьем множество элементов примера 2 на два подмножества по знаку γ. В результате этого получаем [2]

$$G_j(x; \beta) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sqrt{1+\beta^2}}\right) - (-1)^j 2T\left(\frac{x-m}{\sqrt{1+\beta^2}}, \beta\right) \quad (j=1,2), \tag{11}$$

где $T(h, a)$ представляет собой интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_h^{\infty}\int_0^{ax} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

численные значения которого имеются в таблицах (см., например, [6]).

В случае $n_1 = n_2$ оценка максимального правдоподобия α^* значения α есть часть решения системы уравнений [1]

$$G_j(\alpha; \beta) = \frac{1}{4}\eta_j \quad (j=1,2), \tag{12}$$

из которой вытекает, что для распределений (11) при всех η_1 и η_2, таких, что $\eta_1+\eta_2 = 4$, оценка $\alpha^* = m$. Система (12) дает также неравенство $\alpha^*(1,1) < \alpha^*(1,2) = \alpha^*(2,1) < m < \alpha^*(2,3) = \alpha^*(3,2) < \alpha^*(3,3)$. Поэтому для пар (η_1, η_2) с $1 \leqslant \eta_j \leqslant 3$ $(j=1, 2)$ естественно положить $v(\eta_1, \eta_2) \equiv \alpha^*(\eta_1, \eta_2)$. Следуя теперь используемому в доказательстве убывания $f(x; \alpha)$ и $F(x; \alpha)$ предположению о монотонности $v(k_1, k_2)$, полагаем:

$$v(0,0) < v(1,0) = v(0,1) < v(0,2) = v(2,0) < v(3,0) = v(0,3) < v(0,4);$$

$$v(0,1) < v(1,1); \quad v(0,2) < v(1,2); \quad v(0,3) < v(1,3).$$

Симметрично последним можно написать неравенства для случаев $k_1, k_2 > 2$. Отсюда видно, что для исходов эксперимента $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$; $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$; $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 2$ и всех остальных, им эквивалентных или симметричных, функции

$$G(v(\eta_1, \eta_2) - 0; \alpha, \beta) \quad \text{и} \quad G(v(\eta_1, \eta_2); \alpha, \beta)$$

вполне определены. Так, например, для всех η_1 и η_2, таких, что $\eta_1+\eta_2 = 4$, согласно (3) и (10), справедливо

$$f\,(v\,(\eta_1,\ \eta_2);\ \alpha) = \inf_{-1 \leqslant \beta \leqslant 1} \sum_{s=0}^{3} p_1\,(s;\ \alpha,\ \beta) \sum_{r=0}^{q_s} p_2\,(r;\ \alpha,\ \beta),$$

где $q_s = 3 - s$;

$$F\,(v\,(\eta_1,\ \eta_2);\ \alpha) = \sup_{-1 \leqslant \beta \leqslant 1} \sum_{s=0}^{4} p_1\,(s;\ \alpha,\ \beta) \sum_{r=0}^{q_s} p_2\,(r;\ \alpha;\ \beta),$$

где $q_s = 4 - s$.

Если здесь взять $\alpha_1 = m - 1{,}424$ и $\alpha_2 = m + 1{,}424$, как это имеет место в примере 2 с $\eta = 4$ и $n = 8$, то получаем $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2 \approx 0{,}0145$ $(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0{,}971)$.

Предположим теперь, что в ситуации $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$ подходящим доопределением функции v для оставшихся пар возможных значений η_1 и η_2 является $v(2{,}0) < v(1{,}1) < v(3{,}0) < v(2{,}1)$. В результате получаем:

$$f\,(v\,(1,\ 1);\ \alpha) = \inf_{-1 \leqslant \beta \leqslant 1} \sum_{s=0}^{2} p_1\,(s;\ \alpha,\ \beta) \sum_{r=0}^{q_s} p_2\,(r;\ \alpha,\ \beta),$$

где

$$q_0 = 2,\quad q_1 = 0,\quad q_2 = 0;$$

$$F\,(v\,(1{,}1);\ \alpha) = \sup_{-1 \leqslant \beta \leqslant 1} \sum_{s=0}^{2} p_1\,(s;\ \alpha,\ \beta) \sum_{r=0}^{q_s} p_2\,(r;\ \alpha,\ \beta),$$

где $q_s = 2 - s$. Этот случай эквивалентен исходу эксперимента примера 2 с $\eta = \eta_1 + \eta_2 = 2$ и $n = n_1 + n_2 = 8$. Поэтому для сравнения найдем здесь α_1 и α_2 такие, что $\alpha_2 - \alpha_1 = 3{,}168$ и $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$ (см. табл. 1). Последние равны соответственно $m - 2{,}448$, $m + 0{,}72$ и $0{,}0041$ $(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0{,}9918)$. При таких же условиях могут быть рассмотрены и остальные случаи.

Результаты вычислений для такого выбора α_1 и α_2 при $n_1 = n_2 = 2$ и $n_1 = n_2 = 4$ представлены в табл. 2, где в последней колонке даны значения β, которые определяют ε_1 и ε_2 соответственно.

Таблица 2

$n_1 = n_2$	$(\eta_1,\ \eta_2)$	$\alpha_1 - m;\ \alpha_2 - m$	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2;\ 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$	$\beta_1';\ \beta_2'$
2	(0,0)	—0.366	0,0163 —	— 0
	(1,0) или (0,1)	—3,714 1,06	0,0175 0,965	±1 ±1
	(1,1) и др. с $\eta_1 + \eta_2 = 2$	—2,108 2,108	0,0195 0,961	±1 ±1
4	(0,0)	— —0,335	0,025 —	— 0
	(1,0) или (0,1)	—3,9 0,082	0,023 0,954	±1 0
	(2,0) или (0,2)	—2,739 0,429	0,0155 0,969	±1 ±1
	(1,1)	-2,448 0,72	0,004 0 992	±1 ±1
	(3,0) или (0,3)	—2,05 0,867	0,0125 0,975	±1 ±1
	(2,1) или (1,2)	—0,847 1,07	0,007 0,986	±1 ±1
	(2,2) и др. с $\eta_1 + \eta_2 = 4$	—1,424 1,424	0,0145 0,971	±1 ±1

Для отсутствующих в табл. 2 исходов эксперимента доверительные пределы и вероятности отыскиваются из соотношений:

$$\alpha_1(k_1,\ k_2) = 2m - \alpha_2(n_1 - k_1,\ n_2 - k_2);\qquad \varepsilon_1(k_1,\ k_2) = \varepsilon_2(n_1 - k_1,\ n_2 - k_2),$$

где

$$n_1 = n_2 = 2{,}4;\ 0 < k_j \leqslant n_j\ (j = 1{,}2).$$

3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

С точки зрения эффективности использования элементов, даже при малом числе последних колонка $1-\varepsilon_1-\varepsilon_2$ в табл. 2 говорит в пользу схемы измерения с предварительной группировкой элементов по знаку частной производной от функции распределения порогов срабатывания по мешающему параметру. Можно ожидать, что с расширением множества возможных значений β схема примера 3 станет еще предпочтительнее схемы примера 2 при увеличении числа элементов. Так, например, в ситуации $- \quad \leqslant \beta \leqslant 2$ эксперимент примера 2 для $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0{,}025$ $(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2=0{,}95)$ при $\eta=2$, $n=4$ дает $m-\alpha_1=\alpha_2-m=3{,}334$, а при $\eta=4$, $n=8$ соответственно 2,252. Для этих же значений α_1 и α_2 эксперимент примера 3 при $\eta_1+\eta_2=2$, $n_1=n_2=2$ дает $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0{,}0185$ $(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2=0{,}963)$, а при $\eta_1+\eta_2=4$, $n_1=n_2=4$ соответственно $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0{,}0101$ $(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2=0{,}9798)$. При дальнейшем расширении множества B доверительные вероятности примера 3, определяемые таким же способом, практически не возрастают.

Теперь сравним результаты экспериментов примеров 1 и 3. Ширина доверительного интервала в примере 1 всегда равна 10. Практически наихудший исход эксперимента примера 3 тот, когда в рассматриваемом множестве не сработало ни одного элемента, а в соседнем, с распределениями, отличающимися от распределений (11) только тем, что вместо m есть, как в примере 1, $(m-5)$, сработали все элементы. Оценивая α с помощью этих множеств, получаем при $n_1=n_2=4$ (см. табл. 2) ширину доверительного интервала равной $(m-0{,}335)-(m-5+0{,}335)=4{,}33$, т. е. в 2 раза уже. Что же касается доли ошибочных утверждений об α, соответствующей эксперименту примера 3, то она составляет $0{,}05/(1-0{,}92587)\approx 67\%$ одноименной доли, соответствующей эксперименту примера 1. Для лучшего же исхода эксперимента примера 3 (при $\eta_1+\eta_2=4$, $n_1=n_2=4$) ширина доверительного интервала (см. табл. 2) равна $(m+1{,}424)-(m-1{,}424)=2{,}848$, т. е. в 3,5 раза уже, чем в примере 1, а доля ошибочных утверждений составляет соответственно $(1-0{,}971)/(1-0{,}92587)\approx 40\%$.

В свете полученных численных результатов более совершенного оценивания α можно повторить общий вывод [2] о целесообразности исследований в области рациональных схемных решений повышения точности измерительных устройств путем сочетания увеличения числа применяемых релейных элементов с созданием и использованием различий в зависимостях порогов срабатывания последних от мешающего воздействия.

Приведенные в работе соотношения позволяют предсказать по заданной функции распределения порогов используемых релейных элементов и числа последних долю брака в изготовлении измерительных устройств.

В заключение хочу принести глубокую благодарность профессору М. П. Цапенко за критические замечания по данной работе, а также З. А. Лившицу, который подсказал весьма изящные и короткие выводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Салов. Об оценке измеряемой величины множеством релейных элементов со случайным порогом срабатывания при наличии мешающего воздействия, ч. 1.— Автометрия, 1969, № 2.

2. Г. И. Салов. Об оценке измеряемой величины множеством релейных элементов со случайным порогом срабатывания при наличии мешающего воздействия, ч. II.— Автометрия, 1969, № 4.
3. Л. Н. Большев. О построении доверительных пределов.— Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. X, вып. 1.
4. Л. Н. Большев, Э. А. Логинов. Интервальные оценки при наличии мешающих параметров.— Теория вероятностей и ее применения, 1966, т. XI, вып. 1.
5. Г. И. Салов. Об оценке измеряемой величины множеством релейных элементов со случайным порогом срабатывания.— Автометрия, 1969, № 1.
6. Н. В. Смирнов, Л. Н. Большев. Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения. М., Изд-во АН СССР, 1962.

Поступила в редакцию
28 апреля 1969 г.