А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 6 1969

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АВТОМЕТРИИ

УДК 62—50

А. В. ОСИПОВ

(Ленинград)

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИМАЛЬНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В настоящее время для повышения точности измерений сигнала, искаженного случайными помехами, широко используется метод комплексного использования информации от различных, одновременно работающих измерителей. Существующие методы определения оптимальных преобразований в ряде важных для измерительной практики случаев не дают целесообразного, с инженерной точки зрения, решения по двум следующим причинам.

Во-первых, на практике часто скорость изменения полезного сигнала во много раз превосходит скорость изменения помех. Требования к быстродействию фильтров, осуществляющих оптимальные преобразования, можно значительно снизить, если использовать фильтры «по разностям», когда на вход подаются лишь разности помех какого-либо одного и всех остальных источников информации. «Сигналом» для фильтров «по разностям» является помеха (случайная функция времени), общая для всех измерителей, и для синтеза можно использовать методы, основанные на случайности «сигнала».

Во-вторых, существующие методы определения оптимальных (для бесконечного времени памяти) преобразований требуют сложных вычислений, из которых самой неудобной является операция выделения полюсов [1] интегрального уравнения. Использование операторного метода, первоначально разработанного для синтеза одноканальных непрерывных измерительных систем [2], позволяет свести задачу синтеза к решению системы алгебраических уравнений, для записи которых не требуется выделения полюсов.

В работе рассматриваются методы определения динамических характеристик оптимальных систем измерения как непрерывных, так и дискретных сигналов. Характеристики фильтров «по разностям» определяются с использованием изложенного в работе [3] приема, сущность которого заключается в уменьшении на единицу числа фильтров при использовании условия несмещенности оценки. Вычисление передаточных функций осуществляется операторным методом.

Для решения задачи приняты следующие допущения: измеряемая информация представляет собой сумму сигнала с помехой; помехи имеют гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием, допускают установившийся режим работы и являются статистически независимыми.

Рассмотрим многоканальную систему обработки информации, имеющую N входных каналов и один выходной. Показания каждого измерительного прибора могут быть представлены в виде суммы

$$y_k(t) = m(t) + x_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

где $m(t)$ — полезный сигнал, подлежащий оценке,— произвольная функция времени; $x_k(t)$ — ошибка k-го прибора — центрированный гауссовский процесс с дробно-рациональной плотностью $s_k(\omega)$; $x_k(t)$ и $x_p(t)$ статистически независимы при $k \neq p$.

Необходимо найти преобразования, обеспечивающие несмещенную и оптимальную в смысле минимума среднего квадрата ошибки оценку сигнала $\hat{m}(t)$ при условии наблюдения всех прошлых сигналов $y_k(t)$ на бесконечном интервале времени. Как известно [3], оценка $\hat{m}(t)$, отвечающая требованию несмещенности, имеет вид

$$\hat{m}(t) = y_{k*}(t) - \hat{x}_{k*}(t), \tag{2}$$

где $\hat{x}_{k*}(t)$ зависит лишь от разностей

$$z_k(t) = y_k(t) - y_{k*}(t) = x_k(t) - x_{k*}(t), \tag{3}$$

где $k \neq k^*$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$; k^* — любое из $1, 2, \ldots, N$. Для простоты дальнейших обозначений примем $k^* = N$. «Сигналом» для оценки $\hat{x}_N(t)$ является $x_N(t)$, а помехами — $x_k(t)$; $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

Оценка $\hat{m}(t)$, определяемая выражением (2), является оптимальной, если (и только если) [3] оценкой $\hat{x}_N(t)$ является условное математическое ожидание $x_N(t)$ при наблюдении разностей $z_k(t)$; $k = 1, 2, \ldots, N-1$. Для аддитивных гауссовских помех оптимальная оценка $\hat{x}_N(t)$ состояния $x_N(t)$ отыскивается в виде

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{k=1}^{N-1} \Phi_k(p)\, z_k(t) \tag{4}$$

и оптимальные передаточные функции $\Phi_k(p)$ определяются из минимума дисперсии ошибки

$$D\varepsilon = D(\hat{m}(t) - m(t)) = D(\hat{x}_N(t) - x_N(t)).$$

Вследствие случайности «сигнала» $x_N(t)$ для определения $\Phi_k(p)$ используется операторный метод.

Обозначим полюса $s_k(\omega)$; $k = 1, 2, \ldots, N$, лежащие в левой полуплоскости, через μ_{j_k}, число полюсов μ_{j_k} — через q_k, а кратность полюсов μ_{j_k} — через k_{j_k}. Если $x_k(t)$ не имеет полюсов на границе устойчивости, то все μ_{j_k} совпадут с полюсами $F_k(p)$ — односторонними изображениями Лапласа корреляционных функций $K_k(\tau)$ помех $x_k(t)$:

$$F_k(p) = b_{k0} + \sum_{j_k=1}^{q_k} \sum_{r_{j_k}=1}^{k_{j_k}} \frac{b_{j_k r_{j_k}}}{(p-\mu_{j_k})^{r_{j_k}}}.$$

Если $s_k(\omega)$ имеет полюса (всегда четной кратности) на границе устойчивости, то каждую пару таких полюсов формально рассматриваем как два различных, один из которых лежит в правой, а другой в левой полуплоскости [4]. Для таких $s_k(\omega)$ полюса μ_{j_k} находятся с помощью операции выделения; определение полюсов по $F_k(p)$ приводит к паре полюсов. В рассматриваемом случае передаточные функции дробно-рациональны [4] и поэтому отыскиваются в следующем виде:

$$\Phi_k(p) = E_{k0} + \sum_{l=1}^{\varkappa} \sum_{r_l=1}^{m_l} \frac{B_{kr_l}}{(p-\lambda_l)^{r_l}}; \quad k = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{5}$$

Неизвестными параметрами в формуле (5) являются величины λ_l, m_l и $\varkappa$, характеризующие положение, кратность и общее число полюсов, и коэффициенты E_{k0} и B_{kr_l}. Определение неизвестных коэффициентов E_{k0}, B_{kr_l} и полюсов λ_l производится по известной для одномерного случая методике [3]. Для этого дисперсия ошибки при оценке $\hat{x}_N(t)$ в установившемся режиме представляется как функция, зависящая от $\Phi_k(p)$ и $F_k(p)$:

$$D\varepsilon = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \Phi_k(z)\, \Phi_k(-z)\, F_k(z) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} \Phi_k(z)\right)\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} \Phi_k(-z)\right) F_N(z) \right\} dz.$$

Записывая $\Phi_k(p)$ в виде $\Phi_k(p) + \gamma_k \Phi_k^0(p)$, дифференцируя $D\varepsilon(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{N-1})$ по γ_k и полагая $\gamma_k = 0$, найдем систему однородных уравнений

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \Phi_k(-z) \{\Phi_k(z) [F_k(z) + F_k(-z) + F_N(z) + F_N(-z)] +$$

$$+ \sum_{\nu=1;\ \nu \neq k}^{N-1} \Phi_\nu(z) [F_N(z) + F_N(-z)] - F_N(-z)\} \, dz = 0;$$

$$k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Вычисляя эти интегралы как сумму вычетов, лежащих в левой полуплоскости [3], получим следующую систему алгебраических уравнений для определения искомых неизвестных:

$$\Delta(j\lambda) = \prod_{k=1}^{N-1} s_k(j\lambda) + \sum_{k=1}^{N-1} s_k(j\lambda) \prod_{\nu=1;\ \nu \neq k}^{N-1} s_\nu(j\lambda) = 0; \tag{6}$$

$$\sum_{r_{j_k}=i}^{k_{j_k}} \frac{1}{(r_{j_k}-i)!} \{\Phi_k(p)\}_{p=\mu_{j_k}}^{(r_{j_k}-i)} = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, k_{j_k}; \ j_k = 1, 2, \ldots, q_k; \tag{7}$$

$$\sum_{r_{j_N}=i}^{k_{j_N}} \frac{b_{j_N r_{j_N}}}{(r_{j_N}-i)!} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \Phi_k(p) - 1 \right\}_{p=\mu_{j_N}}^{(r_{j_N}-i)} = 0;$$

$$i = 1, 2, \ldots, k_{j_N}; \quad j_N = 1, 2, \ldots, q_N; \tag{8}$$

$$\sum_{r_l = i}^{m_l} \frac{1}{(r_l - i)!} \left[B_{kr_l} \{ s_k(p) + s_N(p) \}_{p=\lambda_l}^{(r_l - i)} + \right.$$

$$\left. + \{ s_N(p) \}_{p=\lambda_l}^{(r_l - i)} \sum_{j=1;\, j \neq k}^{N-1} B_{jrl} \right] = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m_l; \; l = 1, 2, \ldots, \varkappa. \tag{9}$$

Здесь через $\{\Phi_k(p)\}_{p=\mu}^{(\nu)}$ обозначена ν-я производная $\Phi_k(p)$ по p, вычисленная при $p = \mu$.

Уравнение (6) определяет положение полюсов $\Phi_k(p)$; для отыскания устойчивых операторов из всего множества корней этого уравнения следует выделить лежащие в левой полуплоскости (они обозначены через λ_l). Система (7)—(9) содержит $\sum\limits_{k=1}^{N} \sum\limits_{j_k=1}^{q_k} k_{jk} + (N-1) \sum\limits_{l=1}^{\varkappa} m_l$ уравнений и служит для определения коэффициентов B_{kr_l} и E_{k0}, число которых равно $(N-1)\left(\sum\limits_{l=1}^{\varkappa} m_k + 1 \right)$.

Общее число уравнений больше числа неизвестных. Аналогично [1] можно показать, что система (7)—(9) совместна, а число линейно независимых уравнений (7)—(9) и число неопределенных коэффициентов совпадают, т. е. решение задачи единственно. Найдем линейно зависимые уравнения. Однородная система (9) для каждого l состоит из $N-1$ уравнений, определитель каждой системы равен нулю, а ранг $N-2$, поэтому для каждого l одно из уравнений является следствием остальных и его можно отбросить. Число независимых уравнений при полюсах помех равно рангу вычета матрицы помех в полюсе μ_{j_k}; $k = 1, 2, \ldots, N-1$. В частности, когда все полюса $F_k(p)$ и $\Phi_k(p)$ простые, система (7)—(9) сводится к системе несложных уравнений:

$$\Phi_k(\mu_{j_k}) = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, N-1; \quad j_k = 1, 2, \ldots, q_k;$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \Phi_k(\mu_{j_N}) = 1; \; j_N = 1, 2, \ldots, q_N; \; B_{kl} [s_N(\lambda_l) + s_k(\lambda_l)] +$$

$$+ s_N(\lambda_l) \sum_{\nu=1;\, \nu \neq k}^{N-1} B_{\nu l} = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, N-1; \; l = 1, 2, \ldots, \varkappa. \tag{10}$$

Аналогичным образом находятся передаточные функции дискретной системы, осуществляющей оптимальное преобразование квантованных по времени с шагом Δt разностей $z_k[i]$, где $z_k[i]$ — значение $z_k(t)$ в момент $i\Delta t$. Спектральные плотности последовательностей $x_k(t)$; $k = 1, 2, \ldots, N$, обозначим через $s_k(z)$, полюса $s_k(z)$, лежащие внутри единичного круга, через μ_{jk}; $j_k = 1, 2, \ldots, q_k$, кратность полюса с номером j_k через k_{j_k}. Оценку «сигнала» $x_N[i]$ отыскиваем в виде

$$\hat{x}_N[i] = \sum_{k=1}^{N-1} \Phi_k(z) z_k[i],$$

где z — оператор дискретного преобразования Лапласа. Оптимальные передаточные функции $\Phi_k(z)$ можно представить как

$$\Phi_k(z) = E_{k0} + \sum_{l=1}^{\varkappa} \sum_{r_l=1}^{m_l} \frac{B_{kr_l}}{(z-\lambda_l)^{r_l}}; \quad k = 1, 2, \ldots, N-1,$$

где для определения полюсов λ_l служит уравнение (6), в котором аргумент $j\lambda$ следует заменить на λ и в качестве решения выбрать корни (6), лежащие внутри единичного круга; для определения неизвестных E_{k0} и B_{kr_l} также служат системы (7)—(9), причем вместо аргумента p следует брать аргумент z.

Пример. Обрабатывая показания трех различных приборов с помощью фильтров «по разностям», найти $\Phi_k(p)$ для оценки сигнала в виде

$$\hat{m}(t) = y_3(t) - \sum_{k=1}^{2} \Phi_k(p)\, z_k(t).$$

1. Пусть корреляционные функции помех аппроксимируются зависимостями:

$$K_k(\tau) = \sigma_k^2 e^{-\alpha_k |\tau|}; \quad k = 1, 2; \quad K_3(\tau) = C|\tau|.$$

В данном случае

$$F_k(p) = \frac{\sigma_k^2}{p+\alpha_k}; \quad k = 1,2; \quad s_k(\omega) = \frac{2\alpha_k \sigma_k^2}{\omega^2+\alpha_k^2}.$$

Спектральная плотность $s_3(\omega) = C\omega^{-2}$ имеет два полюса на границе устойчивости, поэтому, производя выделение полюсов, получим $F_3(p) = C p^{-1}$; следовательно, $q_{1_1} = q_{1_2} = q_{1_3} = 1$; $k_{11} = k_{12} = k_{13} = 1$; $\mu_{1_k} = -\alpha_k$; $\mu_{1_3} = 0$. Полюса $\Phi_k(p)$ определяются из уравнения (6):

$$s_1(j\lambda)\, s_2(j\lambda) + s_3(j\lambda)\,(s_1(j\lambda) + s_2(j\lambda)) =$$

$$= \frac{4\alpha_1\alpha_2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\left((j\lambda)^2+\alpha_1^2\right)\left((j\lambda)^2+\alpha_2^2\right)} + \frac{C}{(j\lambda)^2}\left(\frac{2\alpha_1\sigma_1^2}{(j\lambda)^2+\alpha_1^2} + \frac{2\alpha_2\sigma_2^2}{(j\lambda)^2+\alpha_1^2}\right) = 0,$$

которое имеет один корень

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{C\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1\sigma_2^2+\alpha_2\sigma_1^2\right)}{C\alpha_1\sigma_1^2 + C\alpha_2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_1^2\sigma_2^2}},$$

лежащий в левой полуплоскости. Учитывая, что $\varkappa = 1$, будем иметь

$$\Phi_k(p) = E_{k0} + \frac{B_{k1}}{p-\lambda_1}; \quad k = 1,2,$$

где неизвестными являются E_{k0}, B_{k1}. Согласно зависимостям (10), найдем следующие уравнения для определения неизвестных коэффициентов:

$$\frac{E_{k0}(\alpha_k-\lambda_1)+B_{k1}}{\alpha_k-\lambda_1} = 0; \quad k=1, 2; \quad \frac{-E_{10}\lambda_1+B_{11}}{\lambda_1} + \frac{-E_{20}\lambda_1+B_{21}}{\lambda_1} = 1;$$

$$B_{11}[s_3(\lambda_1) + s_1(\lambda_1)] + B_{21}s_3(\lambda_1) = 0;$$

$$B_{11}s_3(\lambda_1) + B_{21}[s_3(\lambda_1) + s_1(\lambda_1)] = 0.$$

Определитель системы двух последних однородных уравнений равен нулю, поэтому одно из них линейно зависит от другого. Отбросив последнее уравнение, получим:

$$B_{11} \frac{\lambda_1 (\alpha_1 + \lambda_1)(\alpha_2 + \lambda_1)}{K \alpha_2 (\alpha_1 + \lambda_1) - \alpha_1 (\alpha_2 + \lambda_1)}; \quad B_{21} = - B_{11} K;$$

$$E_{10} = - \frac{B_{11}}{\alpha_1 + \lambda_1}; \quad K = 1 + \frac{2 \alpha_1 \lambda_1^2 \sigma_1^2}{\left(\alpha_1^2 + \lambda_1^2\right) C}; \quad E_{20} = \frac{B_{11} K}{\alpha_2 + \lambda_1}.$$

2. Пусть в отличие от случая 1

$$K_1 (\tau) = 8^{-1} \alpha_1^{-1} \sigma_1^2 e^{-\alpha_1 |\tau|} (2 + \alpha_1 |\tau|);$$

$$F_1 (p) = \frac{2 \sigma_1^2}{p + \alpha_1} + \frac{\alpha_1 \sigma_1^2}{(p + \alpha_1)^2}; \quad s_1 (\omega) = \frac{8 \alpha_1^3 \sigma_1^2}{\left(\omega^2 + \alpha_1^2\right)^2},$$

т. е. полюс $F_1(p)$ имеет кратность, равную двум. В данном случае $q_{1_1} = 1$; $k_{11} = 2$; $b_{1_1 1_{11}} = 2$; $b_{1_1 2_{11}} = \alpha_1$; $\mu_{1_1} = - \alpha_1$. Уравнение (6) для координат полюсов приводится к виду $\lambda^4 - A\lambda^2 + B = 0$, где A и B зависят от параметров $s_k(\omega)$. Предположим, что это уравнение имеет два различных корня λ_1 и λ_2 в левой полуплоскости, т. е. $\varkappa = 2$, $m_1 = m_2 = 1$, поэтому

$$\Phi_k (p) = E_{k0} + \frac{B_{k1_1}}{p - \lambda_1} + \frac{B_{k1_2}}{p - \lambda_2}; \quad k = 1, \ 2.$$

Неизвестные коэффициенты E_{k0}, B_{k1_1} и B_{k1_2} определяются из уравнений (7)—(9), которые в данном случае имеют вид:

$$b_{1_1 1_{11}} \Phi_1 (- \alpha_1) + b_{1_1 2_{11}} \{\Phi_1 (p)\}^{(1)}_{p = - \alpha_1} = 0;$$

$$b_{1_1 2_{11}} \Phi_1 (- \alpha_1) = 0; \quad \Phi_2 (- \alpha_2) = 0; \quad \sum_{k=1}^{2} \Phi_k (0) = 1;$$

$$B_{11_1} [s_1 (\lambda_1) + s_3 (\lambda_1)] + B_{21_1} s_3 (\lambda_1) = 0;$$

$$B_{11_1} s_3 (\lambda_1) + B_{21_1} [s_1 (\lambda_1) + s_3 (\lambda_1)] = 0;$$

$$B_{11_2} [s_1 (\lambda_2) + s_3 (\lambda_2)] + B_{21_2} s_3 (\lambda_2) = 0;$$

$$B_{11_2} s_3 (\lambda_2) + B_{21_2} [s_1 (\lambda_2) + s_3 (\lambda_2)] = 0.$$

Определитель каждой пары четырех последних уравнений равен нулю, и одно из уравнений пары является следствием другого. Поэтому имеем 6 линейно независимых уравнений для определения 6 неизвестных.

3. Пусть оценка сигнала осуществляется с помощью дискретной системы

$$\hat{m} [i] = y_3 [i] + \sum_{k=1}^{2} \Phi_k (p) z_k [i],$$

а характеристики помех соответствуют случаю 1:

$$K_k [i] = \sigma_k^2 e^{-\alpha_k \Delta t |i|}; \quad k = 1,2; \quad K_3 [i] = C \Delta t [i];$$

$$s_k (z) = \frac{\sigma_k^2 \left(1 - d_k^2\right)}{|z - d_k|^2}; \quad d_k = e^{-\alpha \Delta t}; \quad s_3 (z) = \frac{C \Delta t}{|z - 1|^2}.$$

Здесь $\mu_{1k} = d_k$; $\mu_{13} = 1$. Корни $\Phi_k(z)$ находим из уравнения (6) с учетом выражения

$$\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \left(1-d_1^2\right)\left(1-d_2^2\right)}{|\lambda - d_1|^2 \, |\lambda - d_2|^2} + \frac{C \Delta t}{|\lambda - 1|^2}\left(\frac{\sigma_1^2 \left(1-d_1^2\right)}{|\lambda - d_1|^2} + \frac{\sigma_2^2 \left(1-d_2^2\right)}{|\lambda - d_2|^2}\right) = 0,$$

которое имеет один корень, лежащий внутри единичного круга:

$$\lambda_1 = e^{-\gamma}; \quad \gamma \cong \sqrt{\frac{\left(\alpha_1^2 C \Delta t^3\right) : \sigma_1^2 \left(1-d_1^2\right) + \left(\alpha_2^2 C \Delta t^3\right) : \sigma_2^2 \left(1-d_2^2\right)}{1 + \left(d_1 C \Delta t\right) : \sigma_1^2 \left(1-d_1^2\right) + \left(d_2 C \Delta t\right) : \sigma_2^2 \left(1-d_2^2\right)}};$$

последнее равенство справедливо при $d_k \ll 1$. Учитывая, что $\varkappa = 1$, будем иметь

$$\Phi_k(z) = E_{k0} + \frac{B_{k1}}{z - \lambda_1}; \quad k = 1, 2.$$

Неизвестные E_{k0} и B_{k1} определяются из системы

$$\frac{E_{k0}\,(d_k - \lambda_1) + B_{k1}}{d_k - \lambda_1} = 0; \quad k = 1, \quad 2;$$

$$\frac{-E_{10}\,\lambda_1 + B_{11}}{1 - \lambda_1} + \frac{-E_{20}\,\lambda_1 + B_{21}}{1 - \lambda_1} = 1;$$

$$B_{11}\left[s_3(\lambda_1) + s_1(\lambda_1)\right] + B_{21}\, s_3(\lambda_1) = 0,$$

решение которой не представляет труда.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Катковник, Р. А. Полуэктов, И. Б. Челпанов. Синтез многоканальных дискретных систем при наличии случайных помех.— Изв. АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, 1963, № 11.
2. А. Н. Скляревич. Операторные методы в статистической динамике автоматических систем. «Наука», 1965.
3. Ю. А. Розанов. О регулировании комплекса приборов.— Труды МИАН им. В. А. Стеклова, LXXI. Сб. работ по теории вероятностей. «Наука», 1964.
4. Ш. С. Л. Чанг. Синтез оптимальных систем автоматического управления. М., «Машиностроение», 1964.

Поступила в редакцию
23 декабря 1968 г.