АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1969

УДК 681.2.082/083.519.2

И. В. СМЕРТИНЮК

(Новосибирск)

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОЦЕНКИ ПОЛЕЗНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ, ИЗМЕРЯЕМЫХ С АДДИТИВНЫМИ ГАУССОВЫМИ ПОГРЕШНОСТЯМИ

В задачах с мешающими параметрами отыскание точечных нелинейных оценок полезных параметров обычно производится с помощью метода Байеса [1]. Получаемые оценки являются оптимальными по критерию минимума дисперсии в классе несмещенных оценок.

Однако необходимость задавать априорную плотность распределения параметров приводит к некоторым трудностям, когда известны только конечные диапазоны их возможных значений. Действительно, наиболее естественно было бы при этом задавать априорную плотность распределения параметров в виде равномерного распределения на конечном интервале. Но при измерении сигналов с нормально распределенными аддитивными погрешностями затрудняется отыскание оценок параметров в удобном аналитическом виде. Замена же равномерного распределения параметров нормальным связана с необходимостью оценивания совершаемых приближений. Если измеряемые сигналы являются сложными нелинейными функциями от неизвестных параметров, то отыскание их оценок значительно затрудняется при любых априорных распределениях.

Нами предпринята попытка построения достаточно простого метода получения нелинейных оценок полезных параметров для случая, когда параметры, от которых довольно сложным образом зависят измеряемые сигналы, являются неизвестными постоянными. Априорная информация о параметрах задается в виде конечных диапазонов их допустимых значений.

1. Постановка задачи. Дана k-мерная квазистационарная случайная последовательность

$$x_j(t_i) = \Theta_j \varphi_j(t_i) + \xi_j(t_i) \quad (j = \overline{1, k};\ i = \overline{1, n_j}), \tag{1}$$

где $\Theta_j = \Theta_j(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ — функции, в общем случае нелинейные, от $\psi_1, \ldots, \psi_k$; $\psi_1, \ldots, \psi_k$ — неизвестные постоянные; $\varphi_j(t_i)$ — произвольные функции времени; $\xi_j(t_i)$ — взаимно независимые, нормально распределенные центрированные случайные величины с дисперсией σ_{ji}^2. Функции $\Theta_j(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ должны удовлетворять следующим требованиям.

1. Существует k-мерная область D возможных значений $\psi_i (i=\overline{1,k})$, в которой функции $\Theta_j (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ определены и непрерывны.

2. Существуют и непрерывны в D частные производные от $\Theta_j (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ по всем ψ_i $(i=\overline{1,k})$.

3. Существуют точка $\psi_{10}, \ldots, \psi_{k0}$ в области D, не лежащая на ее границе, и точка $\Theta_{10}, \ldots, \Theta_{k0}$, которые удовлетворяют системе функциональных уравнений

$$\Theta_j - \Theta_j (\psi_1, \ldots, \psi_k) = 0 \quad (j=\overline{1,k}). \tag{2}$$

4. Якобиан $J = \left| \frac{\partial \Theta_j}{\partial \psi_i} \right|$ $(i, j = \overline{1,k})$ отличен в D от нуля.

Требуется оценить параметры $\psi_1, \ldots, \psi_s$ при наличии мешающих параметров $\psi_{s+1}, \ldots, \psi_k$. Мы будем заниматься определением только параметра ψ_1, в дальнейшем обозначаемого через ψ. Определение параметров $\psi_2, \ldots, \psi_s$ проводится совершенно аналогично.

Некоторое представление о физической реализуемости данной математической модели дают приведенные в конце статьи примеры.

Перечисленные выше условия не являются обременительными и обычно на практике выполняются. Действительно, оцениваемые параметры всегда имеют конечные границы возможных значений, которые могут определяться в конкретных задачах конструктивными возможностями систем, характеристики которых измеряются, энергетическими ограничениями и т. п.

Однозначность функций $\Theta_j (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ обеспечивается конструкцией измерительных приборов. Непрерывность и дифференцируемость измеряемых сигналов относительно неизвестных параметров гарантируется как энергетическими ограничениями, так и относительной устойчивостью систем, параметры которых измеряются, в заданном режиме работы. Существование устойчивого режима работы систем обеспечивает также разрешимость системы уравнений (2).

Условие 4 означает, что существует взаимно однозначное соответствие между совокупностями $\Theta_j (j=\overline{1,k})$ и $\psi_i (i=\overline{1,k})$, что может иногда не выполняться. В таких случаях следует выбрать более подходящим образом совокупность измеряемых сигналов $\Theta_j \varphi_j (t)$.

В силу предъявляемых к $\Theta_j (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ требований и в соответствии с теоремой о неявных функциях из системы (2) можно найти однозначную функцию $\psi (\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$, обладающую в заданной области изменения Θ_j непрерывными частными производными [2].

2. Достаточные статистики. Будем искать оценку параметра $\psi (\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ в виде функции от достаточных статистик $T_j (j=\overline{1,k})$. Достаточными статистиками для параметров $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ являются функции $T_j [x_j (t_1), \ldots, x_j (t_{n_j})]$, сохраняющие всю информацию о параметрах $\Theta_j (j=\overline{1,k})$, содержащуюся в выборке $x_j (t_i)$ $(j=\overline{1,k}$; $i=\overline{1,n_j})$. В частности, это обстоятельство выражается в том, что дисперсия оценки, зависящей от достаточных статистик, является наименьшей в классе оценок с заданным смещением, в том числе с нулевым смещением.

Для наших целей можно воспользоваться следующим определением достаточной статистики T_j [3]

$$f(x_j) = g [\Theta_j, T_j (x_j)] \, h (x_j), \tag{3}$$

где $f(x_j)$ — плотность распределения вектора $\{x_j (t_i)\}_{i=1}^{n_j}$; $h(x_j)$ — функция, зависящая только от x_j и не зависящая от параметра Θ_j;

$g[\Theta_j, T_j(x_j)]$ — функция, зависящая от x_j только через $T_j(x_j)$.

Из соотношений (1) и (3) нетрудно получить следующее выражение для достаточных статистик T_j:

$$T_j = \Phi_j^T \sum\nolimits_j^{-1} x_j, \tag{4}$$

где $\Phi_j = \{\varphi_j(t_i)\}_{i=1}^{n_j}$; $\sum_j$ — ковариационная матрица вектора X_j.

Как видим, T_j является линейным преобразованием вектора x_j с матрицей преобразования $\Phi_j^T \sum_j^{-1}$. Тогда в соответствии с общими правилами [4] плотность распределения T_j будет также нормальной с математическим ожиданием

$$E\{T_j\} = \Theta_j \Phi_j^T \sum\nolimits_j^{-1} \Phi_j \tag{5}$$

и дисперсией

$$D\{T_j\} = \Phi_j^T \sum\nolimits_j^{-1} \Phi_j. \tag{6}$$

3. Основные соотношения. Поскольку T_j взаимно независимы, то уравнение для нахождения несмещенной оценки $\hat{\psi}(T_1, \ldots, T_k)$ параметра $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ может быть записано в следующем виде:

$$\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dT_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(T_1, \ldots, T_k) \prod_{j=1}^{k} f_j(T_j)\, dT_k. \tag{7}$$

Функция $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ непрерывна, поэтому на заданном конечном интервале Θ_j $(j = \overline{1,k})$ она может быть представлена с любой относительной точностью δ многочленом степени $h(\delta)$:

$$\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = \sum_{i=0}^{p(\delta)} c_i \prod_{j=1}^{k} \Theta_j^{s(ij)}. \tag{8}$$

Здесь $h(\delta) = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{k} s(ij)$.

Тогда искомая оценка $\hat{\psi}(T_1, \ldots, T_k)$ с относительным смещением δ будет иметь вид

$$\hat{\psi}(T_1, \ldots, T_k) = \sum_{i=0}^{p(\delta)} c_i \prod_{j=1}^{k} m^{\{s(ij)\}}(T_j). \tag{9}$$

Следовательно, наша задача свелась к нахождению $m^{s(ij)}(T_j)$:

$$\Theta_j^{s(ij)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} m^{\{s(ij)\}}(T_j)\, f_j(T_j)\, dT_j. \tag{10}$$

В соответствии с (5) и (6) соотношение (10) может быть представлено в форме

$$\Theta_j^{s(ij)} \sqrt{\pi} \exp\left\{\frac{\Theta_j^2}{4\lambda_j^2}\right\} = \lambda_j \int\limits_{-\infty}^{\infty} m^{\{s(ij)\}}(T_j)\, e^{\Theta_j T_j} e^{-\lambda_j^2 T_j^2}\, dT_j, \tag{11}$$

где $\lambda_j = \left[2\Phi_j^T \sum_j^{-1} \Phi_j\right]^{-\frac{1}{2}}$.

Если в (11) сделаем замену переменных $T_j = -\tau_j$, то получим формулу для двустороннего преобразования Лапласа, где задана функция-изображение

$$\Theta_j^{s(ij)} \sqrt{\pi} \exp\left\{\frac{\Theta_j^2}{4\lambda_j^2}\right\}$$

и требуется найти функцию-оригинал

$$\lambda_j m_j^{\{s(ij)\}} (\tau_j) e^{-\lambda_j^2 \tau_j^2}.$$

Существует простое соответствие между этими двумя функциями, справедливое при всех значениях Θ_j [5], позволяющее $m^{s(ij)}(\tau_j)$ представить следующим образом:

$$m^{\{s(ij)\}}(T_j) = \lambda_j^{s(ij)} H_{s(ij)}(\lambda_j T_j), \tag{12}$$

где $H_{s(ij)}(\lambda_j T_j)$ — полином Эрмита порядка $s(i, j)$. Здесь мы снова заменили $-\tau_j$ на T_j.

Теперь мы можем записать оценку $\hat{\psi}(T_1, \ldots, T_k)$ (9) параметра $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ (8) в явном виде

$$\hat{\psi}(T_1, \ldots, T_k) = \sum_{i=0}^{p(\delta)} c_i \prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{s(ij)} H_{s(ij)}(\lambda_j T_j). \tag{13}$$

Поскольку величины $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ между собой функционально не связаны, то оценка (13) будет единственной [3]. Определим дисперсию оценки $\hat{\psi}(T_1, \ldots, T_k)$:

$$D\{\hat{\psi}(T_1, \ldots, T_k)\} = F(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) - \psi^2(\Theta_1, \ldots, \Theta_k), \tag{14}$$

где

$$F(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = E\{\hat{\psi}^2(T_1, \ldots, T_k)\}.$$

Для нахождения $F(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ величину $\hat{\psi}^2(T_1, \ldots, T_k)$ снова представим, аналогично (13), в виде разложения по полиномам Эрмита, только уже при других значениях коэффициентов. С этой целью воспользуемся некоторыми свойствами полиномов Эрмита [6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = \begin{cases} 0; & n \neq m; \\ f_n; & n = m, \end{cases} \tag{15}$$

где $f_n = 2^n n! \sqrt{\pi}$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) H_k(x)\, dx = \begin{cases} 0; & m+n+k \text{ нечетно}; \\ B_{nmk}; & m+n+k \text{ четно}, \end{cases} \tag{16}$$

где B_{nmk} отличается от нуля только при соблюдении следующих трех соотношений между индексами:

$$n + m \geqslant k;\ n + k \geqslant m;\ m + k \geqslant n. \tag{17}$$

При выполнении (17) будет справедливо равенство

$$B_{nmk} = \frac{2^s \sqrt{\pi}\, n!\, m!\, k!}{(s-n)!\,(s-m)!\,(s-k)!}, \tag{18}$$

где $2s = m + n + k$.

Проделав очевидные преобразования, вытекающие из (8), (13)—(18), получим выражение для $F(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ в виде полинома степени $g(h) = \max\limits_t \sum\limits_{j=1}^{k} s(jt)$:

$$F(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = \sum_{t=0}^{q(p)} b_t \prod_{j=1}^{k} \Theta_j^{s(jt)}, \tag{19}$$

где $g(h) \leqslant 2h(\delta)$;

$$b_t = \sum_{k,i} c_k c_i \prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{2r(jki)} 2^{r(jki)} \frac{s(jk)!\, s(ji)!}{[d(jki) - s(jk)]!\, [d(jki - s(ji))]!\, [d(jki) - s(jt)]!}, \tag{20}$$

где $2r(jki) = s(jk) + s(ji) - s(jt)$, $2d(jki) = s(jk) + s(ji) + s(jt)$. Суммирование ведется по всем k и i, удовлетворяющим при данном t условиям (17).

Окончательно под дисперсией оценки $\hat{\psi}(T_1, \ldots, T_k)$ будем понимать величину

$$D\{\hat{\psi}(T_1, \ldots, T_k)\} = \max_{\Theta_1, \ldots, \Theta_k \in D} \{F(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) - \psi^2(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)\}. \tag{21}$$

4. Асимптотические формулы. При большом объеме измерений возникает возможность построения оценок хотя и не оптимальных, но получаемых более простым способом. Правда, эти оценки будут несмещенными лишь асимптотически. Однако мы по-прежнему будем пользоваться тем фактом, что необходимо определять только часть тех параметров, от которых зависят измеряемые сигналы.

Из сопоставления (8) и (13) следует, что оценка параметров Θ_j будет иметь вид

$$\hat{\Theta}_j = 2\lambda_j^2 T_j. \tag{22}$$

Дисперсию этой оценки с учетом обозначений (11) можно представить следующим образом [4]:

$$D\{\hat{\Theta}_j\} = [\Phi_j^T \Sigma_j^{-1} \Phi_j]^{-1}. \tag{23}$$

Выражение (23), представленное соотношением

$$D\{\hat{\Theta}_j\} = \Big[\sum_{i=1}^{n_j} \varphi_j^2(t_i)\, \sigma_{ji}^{-2}\Big]^{-1}, \tag{24}$$

при ограниченных среднеквадратичных погрешностях измерений $\sigma_{ji} \leqslant M$ (здесь M — заданное число) показывает, что с увеличением объема измерений ($n_j \to \infty$) дисперсия оценки $\hat{\Theta}_j$ будет стремиться к нулю, т. е. будет справедливо равенство

$$\lim_{n_j \to \infty} 2\lambda_j^2 T_j = \Theta_j. \tag{25}$$

Тогда с учетом непрерывности функции $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ будем иметь

$$\lim_{n_1, \ldots, n_k \to \infty} \hat{\psi}_a(\tau_1, \ldots, \tau_k) = \psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k), \tag{26}$$

где $\hat{\psi}_a(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ получается из $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ путем замены Θ_j на $\tau_j = 2\lambda_j^2 T_j$.

Соотношение (26) показывает, что оценка $\hat{\psi}_a(\tau_{10} \ldots, \tau_k)$ будет асимптотически несмещенной. Определим дисперсию этой оценки.

Для этого разложим функцию $\hat{\psi}_a(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ в точке $\tau_{10} = \Theta_1, \ldots, \tau_{k0} = \Theta_k$ в ряд Тейлора и ограничимся первым членом разложения:

$$\hat{\psi}_a(\tau_1, \ldots, \tau_k) = \psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)}{\partial \Theta_j} (\tau_j - \Theta_j). \quad (27)$$

Из соотношения (27) с учетом (22) и (23) легко получить выражение для дисперсии оценки $\hat{\psi}_a(\tau_1, \ldots, \tau_k)$

$$D\{\hat{\psi}_a(\tau_1, \ldots, \tau_k)\} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial \Theta}\right]^T \Lambda^{-1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \Theta}\right], \quad (28)$$

где $\frac{\partial \psi}{\partial \Theta} = \left\{\frac{\partial \psi}{\partial \Theta_j}\right\}$ $(j = \overline{1, k})$; Λ — диагональная матрица с элементами $\left\{\Phi_j^T \sum_j^{-1} \Phi_j\right\}$ $(j = \overline{1, k})$.

Получим теперь количественную оценку объема измерений, при котором можно пользоваться формулой (28). Для этого в соответствии с теоремой о среднем значении [2] представим $\hat{\psi}_a(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ выражением

$$\hat{\psi}_a(\tau_1, \ldots, \tau_k) = \psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)}{\partial \Theta_j} (\tau_j - \Theta_j) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi(\Theta_1', \ldots, \Theta_k')}{\partial \Theta_i \, \partial \Theta_j} (\tau_i - \Theta_i)(\tau_j - \Theta_j),$$

где вторые производные берутся в произвольной точке $(\Theta_1', \ldots, \Theta_k') \in D$.

Тогда, повторяя операции, проделанные при выводе (28), получим, что дисперсия оценки $\hat{\psi}_a(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ будет иметь вид

$$D\{\hat{\psi}_a(\tau_1, \ldots, \tau_k)\} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial \Theta}\right]^T \Lambda^{-1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \Theta}\right] + \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta_i^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta_j^2} \lambda_i^2 \lambda_j^2 +$$

$$+ 2 \sum_{i,j=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j}\right)^2 \lambda_i^2 \lambda_j^2. \quad (29)$$

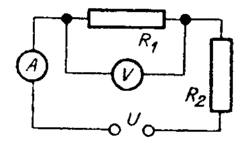
Задаваясь необходимой относительной точностью вычисления дисперсии β^2, можно получить из (29) требуемые ограничения на n_j $(j = \overline{1, k})$, сформулированные следующим образом:

$$\max_{\Theta_1, \ldots, \Theta_k \in D} \frac{\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta_i^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta_j^2} \lambda_i^2 \lambda_j^2 + 2 \sum_{i,j=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j}\right)^2 \lambda_i^2 \lambda_j^2}{\left[\frac{\partial \psi}{\partial \Theta}\right]^T \Lambda^{-1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \Theta}\right]} \leqslant \beta^2. \quad (30)$$

В заключение остановимся на сравнении оценок, получаемых в соответствии с п. 3, являющихся оптимальными по критерию минимума дисперсии, и асимптотических оценок. Как показано в [7], при условиях, удовлетворяемых в рамках нашей задачи, всякая функция от достаточных статистик является равномерно наилучшей несмещенной оценкой своего математического ожидания.

В соответствии с (26) математическое ожидание асимптотической оценки при $n_j \to \infty$ стремится к истинному значению параметра $\psi(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$. Следовательно, асимптотические оценки будут асимптотически оптимальными в классе несмещенных оценок.

Пример 1. К источнику напряжения U подключены два сопротивления R_1 и R_2 (см. рисунок). Известны номинальные значения: $U_н = 100$ *в*; $R_{1н} = 50$ *ом*; $R_{2н} = 200$ *ом*. Допустимый разброс величин R_1 и R_2 не более 5% от их номинальных значений. С помощью вольтметра V и амперметра A, включенных согласно рисунку, требуется определить величину R_1. Здесь лишающим параметром будет R_2. Выражения для тока i_s и напряжения u_s можно представить в следующем виде:



$$i_s = \Theta_1 + \xi_s; \quad u_s = \Theta_2 + \eta_s,$$

где $\Theta_1 = \dfrac{U}{R_1 + R_2}$; $\Theta_2 = \dfrac{U R_1}{R_1 + R_2}$; ξ_s, η_s — центрированные нормально распределенные погрешности с дисперсиями, определяемыми по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{\delta_1 U}{R_{1н} + R_{2н}}; \quad \sigma_2 = \frac{\delta_2 U R_{1н}}{R_{1н} + R_{2н}},$$

где δ_1 и δ_2 задаются классом точности A и V соответственно:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_0 = 0{,}01.$$

Величину $R_1 = \dfrac{\Theta_2}{\Theta_1}$ с относительной погрешностью $\delta_{max} = 10^{-4}$ можно представить так:

$$R_1'(\Theta_1, \Theta_2) = 2{,}5\,\Theta_2\,(3 - 7{,}5\,\Theta_1 + 6{,}25\,\Theta_1^2).$$

Достаточными статистиками для Θ_1 и Θ_2 будут величины:

$$T_1 = \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{s=1}^{n} i_s; \quad T_2 = \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{s=1}^{n} u_s,$$

где n — число измерений.

Оценка $\hat{R}_1(T_1, T_2)$, характеризующаяся относительным смещением $\delta = \dfrac{R_1(\Theta_1, \Theta_2) - R_1'(\Theta_1, \Theta_2)}{R_1(\Theta_1, \Theta_2)}$, имеет вид

$$\hat{R}_1(T_1, T_2) = 2{,}5\,\lambda_2 H_1(\lambda_2 T_2)\,[3 - 7{,}5\,\lambda_1 H_1(\lambda_1 T_1) + 6{,}25\,\lambda_1^2 H_2(\lambda_1 T_1)], \quad (31)$$

где $\lambda_1 = \dfrac{\sigma_1}{\sqrt{2n}}$; $\lambda_2 = \dfrac{\sigma_2}{\sqrt{2n}}$.

Наличие мультипликативной погрешности измерений, вместо аддитивной, сказывается в появлении дополнительного смещения [за счет нулевого члена в $H_2(\lambda_1 T_1)$] порядка

$$\delta_8 = \frac{10\,\delta_0}{n}.$$

Дисперсия $D\{\hat{R}_1(T_1, T_2)\}$, являющаяся полиномом второго порядка относительно T_1 и T_2, вычисляется по формуле (21). В табл. 1 приведены значения величины $\sqrt{D'} = \frac{1}{R_{1\text{н}}}\sqrt{D\{\hat{R}_1(T_1, T_2)\}}$.

Асимптотические формулы для оценки $\hat{R}_{1a}(T_1, T_2)$ и ее дисперсии в соответствии с (26) и (28) могут быть записаны следующим образом:

$$\hat{R}_{1a}(T_1, T_2) = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} u_s}{\sum\limits_{s=1}^{n} i_s}; \quad D\{\hat{R}_{1a}(T_1, T_2)\} = \frac{2R_1^2\,\delta_0^2}{n}.$$

Значения величины $\sqrt{D_a''} = \frac{1}{R_{1\text{н}}}\sqrt{D\{\hat{R}_{1a}(T_1, T_2)\}}$ приведены в табл. 1. Соотношение для дисперсии D_a верно при соблюдении условия (30): $n \gg 1{,}5$. Здесь принято $\beta = 10^{-2}$.

Таблица 1

n	50	500	1000	1500	2000	2500
$\sqrt{D'}$	$2{,}56\cdot10^{-3}$	$8{,}1\cdot10^{-4}$	$5{,}74\cdot10^{-4}$	$4{,}68\cdot10^{-4}$	$4{,}06\cdot10^{-4}$	$3{,}63\cdot10^{-4}$
$\sqrt{D_a'}$	$2\cdot10^{-3}$	$6{,}32\cdot10^{-4}$	$4{,}47\cdot10^{-4}$	$3{,}65\cdot10^{-4}$	$3{,}16\cdot10^{-4}$	$2{,}83\cdot10^{-4}$

Пример 2. Самолет облетает радиолокационную станцию на высоте $H = 4$ *км* по окружности $R = R_0 + \Delta R$, где R_0 задается траекторией полета, а ΔR — неизвестное смещение. Прибор, определяющий скорость самолета $V = V_0 + W$, измеряет ее с неизвестной постоянной ошибкой W. На основе измерений азимута $\beta(t_i)$ и дальности $r(t_i)$ самолета, производимых радиолокационной станцией с частотой 1 *гц*, требуется определить W при наличии мешающего параметра ΔR. Здесь $R = 200$ *км*, $V_0 = 400$ *м/сек*, $|\Delta R| \leqslant 50$ *км*, $|W| \leqslant 50$ *м/сек*.

Измеряемые величины $\beta(t_i)$ и $r(t_i)$ имеют следующий вид:

$$r(t_i) = \Theta_1 + \xi(t_i); \quad \beta(t_i) = \Theta_2 t_i + \eta(t_i),$$

где $\xi(t_i)$, $\eta(t_i)$ — центрированные нормально распределенные величины со среднеквадратичными отклонениями $\sigma_r = 200$ *м* и $\sigma_\beta = 10'$; $\Theta_1 = R_0 + \Delta R$; $\Theta_2 = \frac{V_0 + W}{\sqrt{(R_0 + \Delta R)^2 - H^2}}$.

Величина $W(\Theta_1, \Theta_2) = \Theta_2\sqrt{\Theta_1^2 - H^2}$ с относительной погрешностью $\delta_{\max} = 10^{-6}$ (относительно V_0) представима в виде

$$W(\Theta_1, \Theta_2) = \Theta_2(-120 + 1{,}0006\,\Theta_1 - 3\cdot10^{-9}\,\Theta_1^2) - V_0.$$

Достаточными статистиками для Θ_1 и Θ_2 являются функции:

$$T_1 = \frac{1}{\sigma_r^2} \sum_{i=1}^{n} r(t_i); \quad T_2 = \frac{1}{\sigma_\beta^2} \sum_{i=1}^{n} \beta(t_i)\, t_i,$$

где n — число измерений.

Оценка $\hat{W}(T_1, T_2)$, практически несмещенная ($\delta_{\max} = 10^{-6}$), представляется следующим образом:

$$\hat{W}(T_1, T_2) = \lambda_2 H_1(\lambda_2 T_2)\,[-120 + $$
$$+ 1{,}0006\,\lambda_1 H_1(\lambda_1 T_1) - 3 \cdot 10^{-9} \lambda_1^2 H_2(\lambda_1 T_1)],$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_r}{\sqrt{2n}}; \quad \lambda_2 = \frac{\sigma_\beta \sqrt{3}}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)}}.$$

Дисперсия оценки $\hat{W}(T_1, T_2)$ определяется по формуле (21) и представлена в табл. 2 в виде $\sqrt{D'} = \frac{1}{V_0} \sqrt{D\{\hat{W}(T_1, T_2)\}}$.

Асимптотические формулы для оценки $\hat{W}_a(T_1, T_2)$ и ее дисперсии будут в соответствии с (26) и (28) иметь вид:

$$\hat{W}_a(T_1, T_2) = \frac{1}{nb^2} \sum_{s=1}^{n} \beta(t_s)\, s \sqrt{[\sum_{i=1}^{n} r(t_i)]^2 - n^2 H^2} - V_0,$$

где $b^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

$$D\{\hat{W}_a(T_1, T_2)\} = \frac{V^2}{R^2} \frac{\sigma_r^2}{n} + R^2 \frac{\sigma_\beta^2}{b^2}.$$

Значения величины $\sqrt{D_a'} = \frac{1}{V_0} \sqrt{D_a\{\hat{W}_a(T_1, T_2\}}$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

n	10	200	1000	1500	2000
$\sqrt{D'}$	$0{,}69 \cdot 10^{-1}$	$0{,}82 \cdot 10^{-3}$	$0{,}78 \cdot 10^{-4}$	$0{,}45 \cdot 10^{-4}$	$0{,}18 \cdot 10^{-4}$
$\sqrt{D_a'}$	$0{,}42 \cdot 10^{-3}$	$0{,}77 \cdot 10^{-4}$	$0{,}33 \cdot 10^{-4}$	$0{,}26 \cdot 10^{-4}$	$0{,}22 \cdot 10^{-4}$

Соотношение для дисперсии верно при выполнении условия (30): $n \gg 1$. Существование неравенства $D_a' < D'$ в обоих примерах (см. табл. 1 и 2) объясняется смещенностью асимптотических оценок.

5. Заключение. Предлагаемый метод, рассмотренный на двух примерах, показывает, что для класса задач, определенных в п. 1, существует возможность определения только части параметров, от которых зависят измеряемые сигналы. Оценки параметров являются наилучшими в классе оценок с заданным смещением. Нижний уровень смещения в задачах с аддитивными погрешностями ограничивается только допустимой сложностью расчетов. При мультипликативных погрешностях может появиться дополнительное смещение, прямо пропорциональное длине интервалов допустимого разброса значений параметров и обратно пропорциональное объему измерений, легко определяемое по соответствующим выражениям для оценок. Асимптотические формулы, выведенные в п. 4, позволяют при больших объемах измерений получать довольно просто и быстро асиптотически не смещенные оценки с надежно контролируемой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.
2. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. М., «Наука», 1966.
3. Ю. В. Линник. Статистические задачи с мешающими параметрами. М., «Наука», 1966.
4. Т. Андерсон. Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963.
5. Ван дер Поль и Х. Бреммер. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
6. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
7. С. Р. Рао. Линейные статистические методы и их применения. М., «Наука», 1968.

Поступила в редакцию
25 июня 1969 г.