А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 5 1969

УДК 621.317.33

Э. В. ЗЕЛЯХ, В. А. КИСЕЛЬ
(Одесса)

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ПАРАМЕТРОВ $2n$-ПОЛЮСНИКОВ И $2(p+1)$-ПОЛЮСНИКОВ

В предыдущей работе [1] был рассмотрен способ определения элементов матриц проводимостей и сопротивлений как обратимых, так и необратимых N-полюсников и $(P+1)$-полюсников путем измерения входных иммитансов указанных цепей в определенных режимах работы их полюсов. Практическое значение этого способа обусловлено тем, что входные иммитансы могут быть измерены непосредственно с высокой степенью точности, например, мостовыми методами, в то время как для непосредственного измерения элементов указанных матриц, имеющих характер взаимных проводимостей и взаимных сопротивлений, мостовые методы непригодны.

Настоящая работа имеет целью дать способ определения элементов матриц проводимостей и сопротивлений обратимых и необратимых $2n$-полюсников и $2(p+1)$-полюсников, также основанный на измерении лишь входных иммитансов.

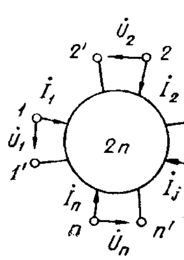

Рис. 1.

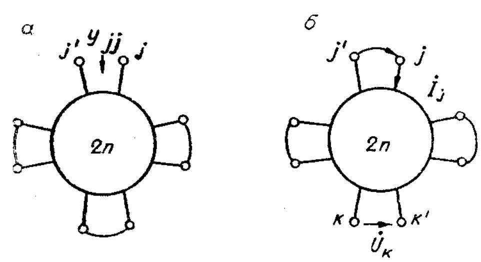

Рис. 2.

Напомним, что $2n$-полюсник (рис. 1) полностью описывается [2] матрицей проводимостей $[y]$ или матрицей сопротивлений $[z]$

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11} \dots y_{1n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ y_{n1} \dots y_{nn} \end{bmatrix}; \ [z] = \begin{bmatrix} z_{11} \dots z_{1n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ z_{n1} \dots z_{nn} \end{bmatrix},$$

где y_{jj} — собственная (входная) проводимость пары полюсов jj' [назовем так проводимость между полюсами j и j' при попарном замыкании накоротко остальных полюсов (рис. 2, a)]; y_{jk} — взаимная (передаточная) проводимость пар полюсов jj' и kk' [назовем так проводимость, равную отношению тока $\dot{I}_j$, протекающего через полюса j и j', к напряжению $\dot{U}_k$ между полюсами k и k' при попарном замыкании накоротко остальных полюсов (см. рис. 2, *б*)]; z_{jj} — собственное (входное) сопротивление j-го контура [назовем так сопротивление между полюсами j и j' при холостом ходе остальных полюсов (рис. 3, *а*)]; z_{jk} — взаимное (передаточное) сопротивление j-го и k-го контуров [назовем так сопротивление, равное отношению напряжения $\dot{U}_j$ между зажимами j и j' к току $\dot{I}_k$, протекающему в k-м контуре при холостом ходе остальных полюсов (см. рис. 3, *б*)].

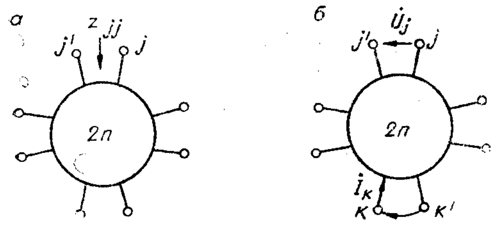

Рис. 3.

Определение взаимных проводимостей. Составим матрицы входных проводимостей $2n$-полюсника

$$[Y]'_{\text{вх}} = \begin{bmatrix} Y'_{11} & \dots & Y'_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ Y'_{n1} & \dots & Y'_{nn} \end{bmatrix}; \quad [Y]''_{\text{вх}} = \begin{bmatrix} Y''_{11} & \dots & Y''_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ Y''_{n1} & \dots & Y''_{nn} \end{bmatrix}.$$

Под элементом Y'_{jk} подразумевается проводимость, измеренная в следующих условиях: полюса j и j' соединяются соответственно с полюсами k и k', остальные полюса попарно замыкаются накоротко между собой; проводимость между указанными группами полюсов обозначим Y'_{jk} (рис. 4, *а*). Под элементом Y''_{jk} подразумевается проводимость, измеренная в следующих условиях: полюса j и j' соответственно соединяются с полюсами k' и k, остальные полюса замыкаются накоротко между собой; проводимость между указанными группами полюсов обозначим Y''_{jk} (см. рис. 4, *б*).

Матрицы $[Y]'_{\text{вх}}$ и $[Y]''_{\text{вх}}$ симметричные: $Y'_{jk} = Y'_{kj}$, $Y''_{jk} = Y''_{kj}$. Диагональные элементы матриц $[Y]'_{\text{вх}}$ и $[Y]''_{\text{вх}}$ равны проводимостям между полюсами j и j' ($j = 1, 2, \dots, n$) при попарном замыкании накоротко остальных полюсов, т. е.

$$Y'_{jj} = Y''_{jj} = y_{jj}. \qquad (1)$$

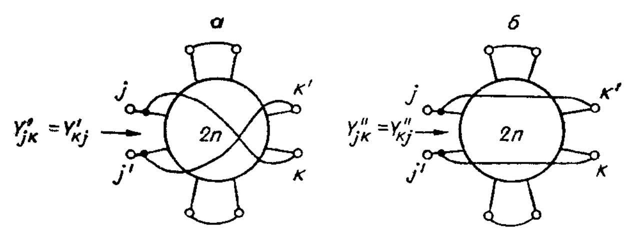

Рис. 4.

Можно показать*, что при соединении полюсов j и j' соответственно с полюсами k и k' в матрице $[y]$ необходимо сложить j-й столбец с k-м столбцом, а затем сложить j-ю строку с k-й строкой; следовательно, проводимости Y'_{jk} и Y'_{kj} равны:

$$Y'_{jk} = Y'_{kj} = y_{jj} + y_{kk} + y_{jk} + y_{kj}. \qquad (2)$$

Далее, при соединении полюсов j и j' соответственно с полюсами k' и k

* Здесь и в дальнейшем доказательства опущены для сокращения объема статьи.

в матрице $[y]$ необходимо вычесть j-й столбец из k-го столбца, а затем вычесть j-ю строку из k-й строки; следовательно, проводимости Y''_{jk} и Y''_{kj} равны:

$$Y''_{jk} = Y''_{kj} = y_{jj} + y_{kk} - y_{kj} - y_{jk}. \tag{3}$$

Выражения (2) и (3) справедливы только тогда, когда указанные

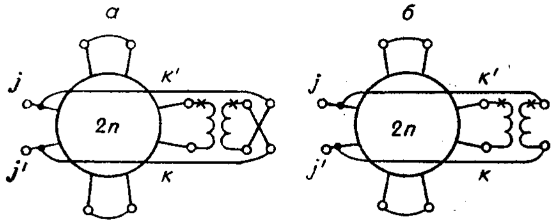

Рис. 5.

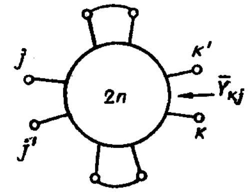

Рис. 6.

Из (1)—(3) вытекает, что для обратимых $2n$-полюсников, у которых $y_{jk} = y_{kj}$, по одной из матриц $[Y]'_{\text{вх}}$ или $[Y]''_{\text{вх}}$ можно вычислить матрицу $[y]$, согласно формулам:

$$y_{jj} = Y'_{jj} = Y''_{jj}, \tag{4}$$

$$y_{jk} = y_{kj} = \frac{1}{2}\left(Y'_{jk} - Y'_{jj} - Y'_{kk}\right), \tag{5}$$

или

$$y_{jk} = y_{kj} = \frac{1}{2}\left(Y''_{jj} + Y''_{kk} - Y''_{jk}\right). \tag{6}$$

Для необратимых $2n$-полюсников, у которых $y_{jk} \neq j_{kj}$, знание матрицы $[Y]'_{\text{вх}}$ или $[Y]''_{\text{вх}}$ позволяет определить только сумму взаимных проводимостей

$$y_{jk} + y_{kj} = Y'_{jk} - Y'_{jj} - Y'_{kk}, \tag{7}$$

или

$$y_{jk} + y_{kj} = Y''_{jj} + Y''_{kk} - Y''_{jk}. \tag{8}$$

Каждая из матриц $[Y]'_{\text{вх}}$ и $[Y]''_{\text{в}}$ позволяет составить $\frac{1}{2}n(n-1)$ независимых уравнений типа (7) или (8), содержащих $n(n-1)$ неизвестных y_{jk} и y_{kj} ($j \neq k$; $j, k = 1, 2, \ldots, n$). В силу сказанного для нахождения взаимных проводимостей необратимого $2n$-полюсника требуется дополнительное знание еще $\frac{1}{2}n(n-1)$ соотношений, связывающих y_{jk} и y_{kj}. Недостающие соотношения можно получить следующими способами.

Первый способ. Создадим для полюсов j и j' режим холостого хода и измерим проводимость между полюсами k и k' при попарном соединении накоротко всех оставшихся полюсов (рис. 6). Обозначим указанную проводимость $\overline{Y}_{kj}$. Можно показать, что

$$\overline{Y}_{kj} = \frac{y_{kk}\, y_{jj} - y_{jk}\, y_{kj}}{y_{jj}},$$

откуда с учетом (1) получим

$$y_{jk}\, y_{kj} = \left(Y'_{kk} - \overline{Y}_{kj}\right) Y'_{jj}. \qquad (9)$$

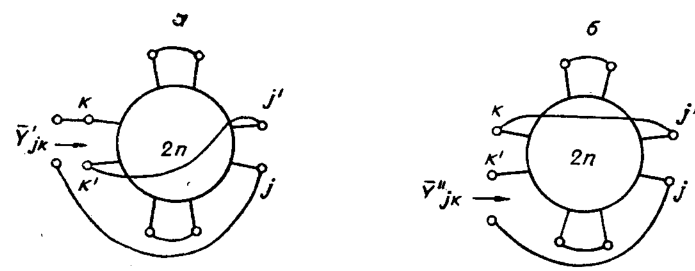

Рис. 7.

Из (7)—(9) следует, что значения y_{jk} и y_{kj} являются корнями уравнения

$$y^2 - a_y\, y + b_y = 0,$$

где

$$a_y = Y'_{jk} - Y'_{jj} - Y'_{kk} = Y''_{jj} + Y''_{kk} - Y''_{jk}; \qquad (10)$$

$$b_y = (Y'_{kk} - \overline{Y}_{kj})\, Y'_{jj}. \qquad (11)$$

Поэтому

$$y_{jk},\ y_{kj} = \frac{a_y}{2} \pm \sqrt{\frac{a_y^2}{4} - b_y} \quad (j \neq k). \qquad (12)$$

Второй способ. Соединим полюс j' с полюсом k' и измерим проводимость между полюсами j и k при попарном замыкании всех оставшихся полюсов (рис. 7, *а*). Обозначим указанную проводимость через $\overline{Y}'_{jk}$. Можно показать, что

$$\overline{Y}'_{jk} = \frac{y_{jj}\, y_{kk} - y_{jk}\, y_{kj}}{Y'_{jk}}, \qquad (13)$$

откуда следует $y_{jk}\, y_{kj} = b'_y$, где $b'_y = Y'_{jj}\, Y'_{kk} - \overline{Y}'_{jk}\, Y'_{jk}$. Искомые проводимости y_{jk} и y_{kj} находятся по формуле (12), в которой вместо b_y подставляется величина b'_y.

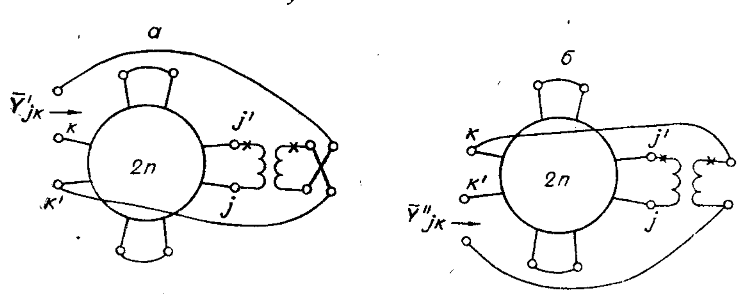

Рис. 8.

Третий способ. Соединим полюс j' с полюсом k и измерим проводимость между полюсами j и k' при попарном замыкании всех оставшихся полюсов (см. рис. 7, *б*). Обозначим эту проводимость через $\overline{Y}''_{jk}$. Можно показать, что

$$\overline{Y}''_{jk} = \frac{y_{jj}\, y_{kk} - y_{jk}\, y_{kj}}{Y''_{jk}}, \tag{14}$$

откуда

$$y_{jk}\, y_{kj} = b''_y,$$

где

$$b''_y = Y''_{jj}\, Y''_{kk} - \overline{Y}''_{jk}\, Y''_{jk}.$$

Искомые проводимости y_{jk} и y_{kj} находятся по формуле (12), в которой вместо b_y подставляется величина b''_y. Нетрудно видеть, что между проводимостями Y'_{jj}, $\overline{Y}_{kj}$, Y'_{jk}, $\overline{Y}'_{jk}$, Y''_{jk}, $\overline{Y}''_{jk}$ существует связь

$$\overline{Y}_{kj}\, Y'_{jj} = \overline{Y}'_{jk}\, Y'_{jk} = \overline{Y}''_{jk}\, Y''_{jk}.$$

Выражения (13) и (14) справедливы только в том случае, когда указанные на рис. 7 соединения полюсов являются регулярными, что, естественно, выполняется не для любых $2n$-полюсников. Поэтому для безусловной справедливости выражений (13) и (14) при нахождении $\overline{Y}'_{jk}$ и $\overline{Y}''_{jk}$ к полюсам j и j' необходимо подключить идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации 1 : 1 (рис. 8, *а*, *б*).

Таким образом, выражение (12) позволяет вычислить значения взаимных проводимостей $2n$-полюсника на основе измерения его входных проводимостей по одному из указанных способов, т. е. при различных режимах работы полюсов. Однако из выражения (12) не следует, какое из его решений необходимо считать равным y_{jk}, а какое y_{kj}.

Другими словами, измерения одних лишь входных проводимостей при любых режимах работы полюсов $2n$-полюсника не дают возможности различить y_{jk} и y_{kj}.

Приведенные соображения справедливы также для нахождения матрицы проводимостей $2(p+1)$-полюсника (рис. 9).

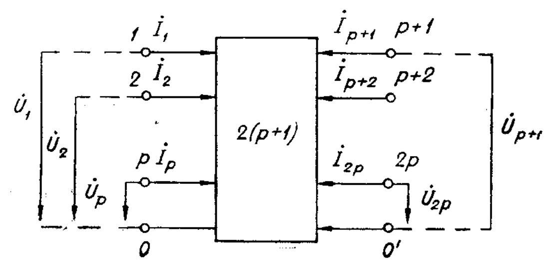

Рис. 9.

Действительно, разделим пары полюсов $2n$-полюсника на две равные группы, из которых одна содержит пары полюсов с номерами от 1 до p, другая от $p+1$ до $2p$; в первой группе объединим все полюсы с номерами $1', 2', \ldots, p'$ в один полюс, который обозначим через 0; во второй группе объединим все полюсы с номерами $p'+1, p'+2, \ldots, 2p'$ в один полюс, который обозначим через 0′. Полученная в результате проделанных преобразований система является $2(p+1)$-полюсником [2]. Следовательно, к $2(p+1)$-полюснику применимы способы определения элементов матрицы проводимостей, изложенные выше для $2n$-полюсника.

Определение взаимных сопротивлений. Составим матрицы входных сопротивлений $2n$-полюсника

$$[Z]'_{\text{вх}} = \begin{bmatrix} Z'_{11} \dots Z'_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Z'_{n1} \dots Z'_{nn} \end{bmatrix}; \qquad [Z]''_{\text{вх}} = \begin{bmatrix} Z''_{11} \dots Z''_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Z''_{n1} \dots Z''_{nn} \end{bmatrix}.$$

Элемент Z'_{jk} представляет собой сопротивление между полюсами j и k', измеренное при соединенных накоротко полюсах j' и k' и разомкнутых остальных полюсах (рис. 10, *а*). Элемент Z''_{jk} представляет собой сопротивление между полюсами j и k, измеренное при соединенных накоротко полюсах j' и k' и разомкнутых остальных полюсах (см.

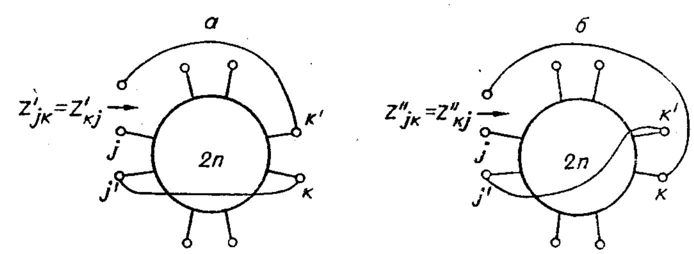

Рис. 10.

рис. 10, *б*). Диагональные элементы матриц $[Z]'_{\text{вх}}$ и $[Z]''_{\text{вх}}$ равны сопротивлениям между полюсами j и j' при холостом ходе остальных полюсов, т. е.

$$Z'_{jj} = Z''_{jj} = Z_{jj}. \tag{15}$$

Матрицы $[Z]'_{\text{вх}}$ и $[Z]''_{\text{вх}}$ симметричные: $Z'_{jk} = Z'_{kj}$, $Z''_{jk} = Z''_{kj}$. Можно показать, что между элементами матриц $[z]$, $[Z]'_{\text{вх}}$ и $[Z]''_{\text{вх}}$ существует зависимость:

$$z_{jj} = Z'_{jj} = Z''_{jj};\ Z'_{jk} = z_{jj} + z_{kk} + z_{kj} + z_{jk},\ Z''_{jk} = z_{jj} + z_{kk} - z_{kj} - z_{jk}. \tag{16}$$

Данные выражения справедливы в том случае, если указанные соединения полюсов являются регулярными. Для абсолютной справедливости полученных выражений при нахождении Z'_{jk} и Z''_{jk} необходимо включить идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации 1 : 1, как указано на рис. 11, *а, б*.

Из (15) и (16) вытекает, что для обратимых $2n$-полюсников, у которых $z_{jk} = z_{kj}$, по каждой из матриц $[Z]'_{\text{вх}}$ и $[Z]''_{\text{вх}}$ можно вычислить

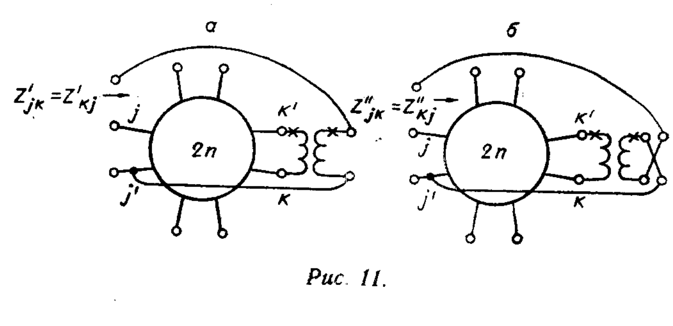

Рис. 11.

матрицу $[z]$, согласно формулам:

$$z_{jj} = Z'_{jj} = Z''_{jj},$$

Для необратимых $2n$-полюсников, у которых $z_{jk} \neq z_{kj}$, знание матрицы $[Z]'_{\text{вх}}$ или $[Z]''_{\text{вх}}$ позволяет составить $\frac{1}{2} n (n-1)$ уравнений вида

$$z_{jk} + z_{kj} = Z'_{jk} - Z'_{jj} - Z'_{kk}, \tag{19}$$

или $\frac{1}{2} n (n-1)$ уравнений вида

$$z_{jk} + z_{kj} = Z''_{jj} + Z''_{kk} - Z''_{jk}. \tag{20}$$

Недостающие уравнения, связывающие z_{jk} и z_{kj}, можно получить нижеследующими способами.

Первый способ. Соединим между собой накоротко полюса j и j' и измерим сопротивление между полюсами k и k' при холостом ходе остальных полюсов (рис. 12). Обозначим это сопротивление $\overline{Z}_{kj}$. Можно показать, что

$$\overline{Z}_{kj} = \frac{z_{kk} z_{jj} - z_{jk} z_{kj}}{z_{jj}},$$

откуда с учетом (15) получим

$$z_{jk} z_{kj} = (Z'_{kk} - \overline{Z}_{kj}) Z_{jj}. \tag{21}$$

Из (19)—(21) следует, что z_{jk} и z_{kj} являются корнями уравнения

$$z^2 - a_z z + b_z = 0,$$

где $a_z = Z'_{jk} - Z'_{jj} - Z'_{kk} = Z''_{jj} + Z''_{kk} - Z''_{jk}$, $b_z = (Z'_{kk} - \overline{Z}_{kj}) Z'_{jj}$.

Поэтому $$z_{jk}, z_{kj} = \frac{a_z}{2} \pm \sqrt{\frac{a_z^2}{4} - b_z} \qquad (j \neq k). \tag{22}$$

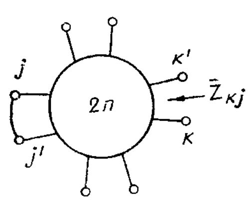

Рис. 12.

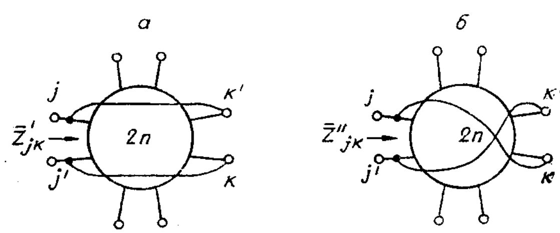

Рис. 13.

Второй способ. Соединим полюс j' с полюсом k, а полюс j с полюсом k' и измерим сопротивление между указанными группами полюсов при холостом ходе оставшихся полюсов (рис. 13, a). Обозначим это сопротивление $\overline{Z}'_{jk}$. Можно показать, что

$$\overline{Z}'_{jk} = \frac{z_{jj}\, z_{kk} - z_{jk}\, z_{kj}}{Z'_{jk}}, \tag{23}$$

откуда следует

$$z_{jk}\, z_{kj} = b'_z,$$

где

$$b'_z = Z'_{jj}\, Z'_{kk} - \overline{Z}'_{jk}\, Z'_{jk}.$$

Искомые сопротивления z_{jk} и z_{kj} находятся по формуле (22), в которой вместо b_z подставляется величина b'_z.

Третий способ. Соединим полюс j с полюсом k, а полюс j' с полюсом k' и измерим сопротивление между указанными группами полюсов при холостом ходе оставшихся полюсов (см. рис. 13, *б*). Обозначим это сопротивление $\overline{Z}''_{jk}$. Можно показать, что

$$\overline{Z}''_{jk} = \frac{z_{jj}\, z_{kk} - z_{jk}\, z_{kj}}{Z''_{jk}}, \tag{24}$$

откуда следует

$$z_{jk}\, z_{kj} = b''_z,$$

где

$$b''_z = Z''_{jj}\, Z''_{kk} - \overline{Z}''_{jk}\, Z''_{jk}.$$

Искомые сопротивления z_{jk} и z_{kj} находятся по формуле (22), в которой вместо b_z подставляется величина b''_z. Из вышеизложенного вытекает, что между сопротивлениями Z_{kj}, Z'_{jj}, $\overline{Z}'_{jk}$, Z'_{jk}, $\overline{Z}''_{jk}$, Z''_{jk} существует связь $\overline{Z}_{kj}\, Z'_{jj} = \overline{Z}'_{jk}\, Z'_{jk} = \overline{Z}''_{jk}\, Z''_{jk}$.

Выражения (23) и (24) справедливы в том случае, когда указанные на рис. 13, *а*, *б* соединения являются регулярными. Для безусловной справедливости этих выражений при нахождении $\overline{Z}'_{jk}$ и $\overline{Z}''_{jk}$ необходимо включить идеальный трансформатор, как указано на рис. 14, *а*, *б*.

Таким образом, матрица [z], так же как и матрица [y], может быть определена по результатам измерений входных иммитансов $2n$-полюсника при определенных режимах работы его полюсов.

Отметим, что изложенные способы справедливы также для нахождения матрицы сопротивлений $2(p+1)$-полюсника.

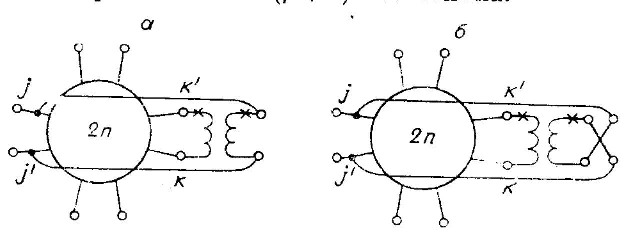

Рис. 14.

Как следует из сравнения выражений (1)—(14) и (5)—(24), предложенные способы измерения матриц проводимостей и матриц сопротивлений являются взаимно дуальными.

Способы измерения, использующие схемы, приведенные на рис. 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13 и 14, представляют собой обобщение метода перегиба, развитого ранее для четырехполюсника [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. В. Зелях, В. А. Кисель. Об измерении параметров N-полюсника.— Автометрия, 1966, № 3.
2. Э. В. Зелях. Основы общей теории линейных электрических схем. М., Изд-во АН СССР, 1951.
3. Э. В. Зелях. Теория перегиба симметричных четырехполюсников.— Известия электропромышленности слабого тока, 1936, № 6 и 7.
4. E. Selach. Note on the Bending properties of the Symmetrical electrical networks.— Philosophical Magazine, 1935, № 7.

Поступила в редакцию
25 января 1968 г.