АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1969

УДК 62—50 : 519.25

Е. П. МАСЛОВ
(Москва)

УПРАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМ ПРОЦЕССОМ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ

С каждым производственным процессом неразрывно связаны операции контроля и управления. По своей природе производственные процессы являются случайными функциями параметров и времени. Поэтому задача контроля и управления производственным процессом есть задача контроля и управления некоторой случайной функцией.

В настоящее время существует обширная литература, посвященная вопросам организации контроля за случайными процессами (см., например, [1—3]). Достаточно полно разработана также теория управления стохастическими процессами при полной [4] и неполной [3, 5] информации для случая, когда процесс наблюдений (контроля) фиксирован и неуправляем. Такой подход оправдан, если процесс контроля обходится без затрат или если они малы. Однако в целом ряде практических задач наблюдения требуют некоторых затрат (например, возникают потери в производительности и т. д.). В этих условиях представляется целесообразным синтезировать оптимальный алгоритм контроля и управления производственным процессом, который учитывал бы не только потери, связанные с управлением процессом и его отклонением от заданного режима, но и затраты на контроль. Целесообразность синтеза подобного алгоритма отмечается в литературе (см., например, [3, 5]). Однако автору известны лишь две работы [3, 6], в которых вопросы контроля и управления рассматриваются в комплексе.

В настоящей статье сделана попытка построить в явном виде оптимальный алгоритм статистического контроля и управления дискретным производственным процессом с учетом стоимостей наблюдений, управления и отклонения процесса от заданного режима. Ниже приводится постановка задачи и дается ее решение для случая, когда об управляемом процессе имеется неполная информация, а помехи наблюдения отсутствуют.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1. Изучается дискретно-непрерывная система. Все величины, фигурирующие в системе, определены лишь в дискретные моменты времени $n=0, 1, 2, \ldots$ Значение любой из величин в произвольный момент вре-

мени $t=n$ снабжается индексом n. Число тактов существования процесса конечно и равно N.

2. Решается байесовская задача; априорные плотности всех случайных величин считаются известными. Погрешности контроля и управления полагаются равными нулю.

3. Статистические свойства управляемого одномерного процесса $\{\eta_n\}$ считаются известными с точностью до случайного вектора $\overline{\Lambda}$ параметров.

4. Контроль сводится к наблюдению координаты управляемого процесса. Для простоты предполагается, что процесс $\{\eta_n\}$ должен «отслеживать» некоторый заданный детерминированный процесс $\{\theta_n\}$.

Физически процедура контроля и управления процессом $\{\eta_n\}$ выглядит следующим образом. К концу произвольного $(n-1)$-го такта управляющее устройство, обладая некоторой информацией о ходе процесса, принимает одно из двух решений: 1) не контролировать процесс в момент времени $t=n-1$; тогда управление строится как функция лишь предыдущей информации о ходе процесса; 2) осуществить процедуру контроля; в этом случае управление строится с учетом результата наблюдения и предыдущей информации. Отметим, что точка $t=n-1$ является концом $(n-1)$-го и началом n-го тактов.

Введем случайную величину

$$\varkappa_n = \begin{cases} 1, & \text{если принимается решение о контроле процесса в момент времени } t=n-1; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и примем следующую систему обозначений: η_n — координата управляемого процесса в момент времени n; u_n — управление на n-м такте.

Из дальнейшего станет ясно, что данная задача решается методом динамического программирования. В соответствии с этим методом минимизация функционала осуществляется «попятным» движением от последнего такта к первому. Поэтому решение о контроле $\varkappa_n$ и управление u_n на n-м такте, опираясь на информацию о предыдущем ходе процесса, по сути дела, зависят от еще не выбранных векторов решений $\vec{\varkappa}_{n-1} = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1})$, управлений $\vec{u}_{n-1} = (u_1, \ldots, u_{n-1})$, а также от вектора наблюдений, структура и размерность которого не известны и определяются видом вектора решений. Лучшее, что можно в таком случае найти,— построить некоторую зависимость $\varkappa_n$ и u_n от этой совокупности в общем виде. Так как при выборе вектора $(\varkappa_n, u_n)$ заранее не известно, сколько раз в течение предыдущих тактов процесс контролировался, то для построения в общем виде алгоритма статистического контроля и управления автор предлагает некоторую формализованную схему синтеза последовательности наблюдений. Суть ее такова. Пусть принято решение произвести контроль, т. е. $\varkappa_n = 1$. В этом случае результат наблюдения совпадает с координатой процесса η_{n-1}. Решение $\varkappa_n = 0$ приводит к отсутствию контроля координаты η_{n-1}. Но факт непоступления информации о процессе $\{\eta_k\}$ — с точки зрения накопления информации о $\{\eta_k\}$ — эквивалентен поступлению информации о некотором гипотетическом процессе, никак не связанном с $\{\eta_k\}$. В частности, в данной работе будем полагать, что этим гипотетическим процессом служит некоторая случайная последовательность независимых величин $\{\varepsilon_n\}$, не связанная с $\{\eta_n\}$.

Таким образом, в обоих случаях (принято решение производить контроль; принято решение не производить его) можно формально считать, что управляющее устройство в момент времени $(n-1)$ осуществляет некоторое наблюдение. Назовем это наблюдение обобщенным и обозначим его символом y_n. Очевидно,

$$y_n = \varkappa_n \eta_{n-1} + (1 - \varkappa_n)\, \varepsilon_{n-1}. \tag{1}$$

Последовательность $\vec{y}_n$ будем называть последовательностью обобщенных наблюдений.

Таким образом, каждый такт характеризуется четырьмя параметрами. Три из них (решение о контроле χ; обобщенное наблюдение y; управление u) относятся к началу такта, а четвертый (координата процесса η) — к концу такта. Рис. 1 иллюстрирует это положение.

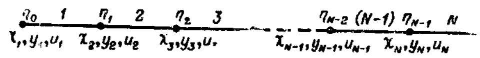

Рис. 1.

К концу произвольного $(n-1)$-го такта управляющее устройство обладает информацией в виде последовательности решений $\vec{\varkappa}_{n-1} = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1})$, последовательности управлений $\vec{u}_{n-1} = (u_1, \ldots, u_{n-1})$ и последовательности обобщенных наблюдений $\vec{y}_{n-1} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$. Кроме того, управляющему устройству известна последовательность $\vec{\Theta}_m = (\Theta_1, \ldots, \Theta_m)$ значений эталонного детерминированного процесса для любого m. На основе этой информации управляющее устройство принимает решение $\varkappa_n = \varkappa_n(\vec{\varkappa}_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \vec{\Theta}_m)$ о контроле координаты η_{n-1}. Если устройство приняло решение $\varkappa_n = 0$, то координата η_{n-1} не контролируется, а оптимальное управление отыскивается как функция лишь предыдущей информации $u_n^* = u_n^*(\vec{\varkappa}_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \varkappa_n = 0, \vec{\Theta}_m)$. Если же принимается решение $\varkappa_n = 1$, то осуществляется процедура контроля $y_n = \eta_{n-1}$ и находится оптимальное управление $u_n^* = u_n^*(\vec{\varkappa}_{n-1}, \varkappa_n = 1, \vec{y}_{n-1}, \eta_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \vec{\Theta}_m)$. На следующем такте все повторяется вновь.

Критерием оптимальности в данной работе служит критерий минимума полного риска. Он образуется следующим образом. На каждом такте существования процесса $\{\eta_n\}$ определяются три типа возможных потерь: 1) потери, вызванные отклонением координаты η_n от заданного режима Θ_n, 2) потери, обусловленные управлением u_n; 3) потери, связанные с контролем координаты η_{n-1}.

Потери на отклонение координаты η_n от Θ_n определяются некоторой функцией потерь, зависящей от η_n, Θ_n, n и в общем случае также от номера такта n: $C_{1n} = C_1(n, \Theta_n, \eta_n)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$. Потери на управление на n-м такте определяются функцией потерь $C_{2n} = C_2(n, u_n)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$, а потери на контроль — функцией потерь $C_{3n} = \varkappa_n C_3(n)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$.

Следуя терминологии [5], удельной функцией потерь на n-м такте назовем выражение вида

$$C_n = C_1(n, \Theta_n, \eta_n) + C_2(n, u_n) + \varkappa_n C_3(n) \quad (n = 1, 2, \ldots, N). \tag{2}$$

(В принципе, функция C_n может зависеть от отдельных потерь и не аддитивно). Общей функцией потерь назовем выражение

$$C_\Sigma = \sum_{n=1}^{N} [C_1(n, \Theta_n, \eta_n) + C_2(n, u_n) + \varkappa_n C_3(n)]. \tag{3}$$

Оптимальной считается такая процедура контроля и управления, для которой полный риск (математическое ожидание величины C_Σ) минимален:

$$R_\Sigma = M\{C_\Sigma\} = M\{C_1(1, \Theta_1, \eta_1) + C_2(1, u_1) + \varkappa_1 C_3(1)\} +$$
$$+ M\{C_1(2, \Theta_2, \eta_2) + C_2(2, u_2) + \varkappa_2 C_3(2)\} +$$
$$+ \ldots + M\{C_1(N, \Theta_N, \eta_N) + C_2(N, u_N) + \varkappa_N C_3(N)\}. \quad (4)$$

Требуется построить последовательность правил решения

$$\Gamma_n = \Gamma_n^\varkappa(\varkappa_n \mid \vec{\varkappa}_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \vec{\Theta}_m)\, \Gamma_n^u(u_n \mid \vec{\varkappa}_n, \vec{y}_n, \vec{u}_{n-1}, \vec{\Theta}_m) = \Gamma_n \Gamma_n^u$$

и соответственно пар управлений $(\varkappa_n, u_n)$, минимизирующих полный риск R_Σ.

ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Запишем выражение для удельного риска R_n, понимая под этим риск на n-м такте:

$$R_n = \int\limits_{\Omega(\vec{\varkappa}_n, \vec{u}_n, \vec{y}_n, \eta_n, \bar{\lambda})} \{C_1(n, \Theta_n, \eta_n) + C_2(n, u_n) + \varkappa_n C_3(n)\}\, P(\vec{\varkappa}_n, \vec{u}_n, \vec{y}_n, \eta_n, \bar{\lambda})\, d\,\Omega. \quad (5)$$

Здесь и далее $\Omega(\cdot)$ означает область совместного изменения величин, стоящих в скобках, а $d\Omega$ — ее бесконечно малый элемент. Условимся также, что функции $P(\cdot)$, имеющие разные аргументы, представляют собой в общем случае различные функции, несмотря на то, что они обозначены одной и той же буквой. Функции $P(\cdot)$ суть совместные (условные и безусловные) плотности вероятности случайных величин, стоящих в скобках.

Совместная плотность вероятности, фигурирующая в (5), представляется в виде произведения одномерных (условных и безусловных) плотностей таким же образом, как это было сделано в [5]. В результате получаем следующее выражение для удельного риска:

$$R_n = \int\limits_{\Omega(\vec{\varkappa}_n, \vec{y}_n, \vec{u}_n, \eta_n, \bar{\lambda})} \{C_1(n, \Theta_n, \eta_n) + C_2(n, u_n) + \varkappa_n C_3(n)\}\, P(\bar{\lambda})\, P(\eta_n \mid \bar{\lambda}, \vec{\varkappa}_n, \vec{y}_n, \vec{u}_n) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} P(y_i \mid \bar{\lambda}, \vec{\varkappa}_i, \vec{y}_{i-1}, \vec{u}_{i-1}) \prod_{i=1}^{n} (\Gamma_i^\varkappa \Gamma_i^u)\, d\,\Omega \qquad (n = 1, \ldots, N). \quad (6)$$

Полный риск соответствует

$$R_\Sigma = \sum_{n=1}^{N} R_n. \quad (7)$$

На каждом такте управляющее устройство принимает одно из двух решений: $\varkappa_n = 0$ или $\varkappa_n = 1$. Поэтому решающее правило $\Gamma_n^\varkappa$ $(n = 1, \ldots, N)$ имеет вид

$$\Gamma_n^\varkappa(\varkappa_n \mid \vec{\varkappa}_{n-1}, u_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{\Theta}_m) - \gamma(\varkappa_n = 1 \mid \vec{\varkappa}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{\Theta}_m)\, \delta(\varkappa_n - 1) +$$
$$+ \gamma(\varkappa_n = 0 \mid \vec{\varkappa}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{\Theta}_m)\, \delta(\varkappa_n - 0), \quad (8)$$

где $\gamma(\varkappa_n = j \mid \vec{\varkappa}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{\Theta}_m)$ $(j = 0{,}1)$ — вероятности принять соответствующие решения при наличии информации $(\vec{\varkappa}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{\Theta}_m)$; $\delta(\cdot)$ — дельта-функции.

Из формулы (1) следует, что при $\varkappa_n = 0$ $y_n = \varepsilon_{n-1}$. Поэтому

$$P(y_n \mid \bar{\lambda}, \vec{\varkappa}_{n-1}, \varkappa_n = 0, \vec{y}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}) = P(\varepsilon_{n-1}) \quad (n = 1, \ldots, N), \tag{9}$$

где $P(\varepsilon_{n-1})$ — безусловная плотность вероятности случайной величины ε_{n-1}. Так как процессы $\{\eta_n\}$ и $\{\varepsilon_n\}$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ независимы, то при $\varkappa_n = 0$

$$\begin{aligned} P(\eta_n \mid \bar{\lambda}, \vec{\varkappa}_{n-1}, \varkappa_n = 0, \vec{u}_n, \vec{y}_n) &= P(\eta_n \mid \bar{\lambda}, \vec{\varkappa}_{n-1}, \varkappa_n = 0, \\ \vec{u}_n, \vec{y}_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) &= P(\eta_n \mid \bar{\lambda}, \vec{\varkappa}_{n-1}, \varkappa_n = 0, \vec{u}_n, \vec{y}_{n-1}). \end{aligned} \tag{10}$$

Подставим формулы (8)—(10) в (6), произведем соответствующие операции интегрирования и, учитывая, что при $\varkappa_n = 1$ $y_n = \eta_{n-1}$, введем функции:

$$\begin{aligned} \alpha_n = \int\limits_{\Omega(\eta_n, \bar{\lambda})} &[C_1(n, \Theta_n, \eta_n) + C_2(n, u_n) + C_3(n)]\, P(\bar{\lambda}) \times \\ \times P(\eta_n \mid \bar{\lambda}, \vec{\varkappa}_{n-1}, \varkappa_n=1, \vec{y}_{n-1}, &\eta_{n-1}\, \vec{u}_n)\, P(\eta_{n-1} \mid \bar{\lambda}, \vec{\varkappa}_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}) \times \\ &\times \prod_{i=1}^{n-1} P(y_i \mid \bar{\lambda}, \vec{y}_{i-1}, \vec{\varkappa}_i, \vec{u}_{i-1})\, d\,\Omega; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \beta_n = \int\limits_{\Omega(\eta_n, \bar{\lambda})} &[C_1(n, \Theta_n, \eta_n) + C_2(n, u_n)]\, P(\bar{\lambda})\, P(\eta_n \mid \bar{\lambda}, \vec{\varkappa}_{n-1}, \varkappa_n = 0, \\ &\vec{y}_{n-1}, \vec{u}_n) \prod_{i=1}^{n-1} P(y_i \mid \bar{\lambda}, \vec{y}_{i-1}, \vec{\varkappa}_i, \vec{u}_{i-1})\, d\,\Omega; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \Phi_n = \Phi_n(\vec{\varkappa}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{\Theta}_m) &= \gamma(\varkappa_n = 1 \mid \vec{\varkappa}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{\Theta}_m) \times \\ \times \int\limits_{\Omega(\eta_{n-1}, u_n)} \alpha_n \Gamma_n^u &(u_n \mid \vec{\varkappa}_{n-1}, \varkappa_n = 1, \vec{y}_{n-1}, \eta_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \vec{\Theta}_m)\, d\,\Omega + \\ + \gamma(\varkappa_n = 0 \mid \vec{\varkappa}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{\Theta}_m) &\int\limits_{\Omega(u_n)} \beta_n \Gamma_n^u (u_n \mid \vec{\varkappa}_{n-1}, \varkappa_n = 0, \\ &\vec{y}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \vec{\Theta}_m)\, d\,\Omega. \end{aligned} \tag{13}$$

С учетом этих обозначений выражение для риска R_n приобретает следующий вид:

$$R_n = \int\limits_{\Omega(\vec{\varkappa}_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{u}_{n-1})} \prod_{i=1}^{n-1} (\Gamma_i^\varkappa \Gamma_i^*)\, \Phi_n(\vec{\varkappa}_{n-1}, \vec{y}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}, \vec{\Theta}_m)\, d\,\Omega \quad (n = 1, 2, \ldots, N). \tag{14}$$

Переходим к выбору $2N$-мерного вектора $(\vec{\varkappa}_N, \vec{u}_N)$, минимизирующего полный риск R_Σ. Эта задача решается методом динамического программирования.

Вначале определяется последняя пара $(\varkappa_N, u_N)$. В выражении (7) от $(\varkappa_N, u_N)$ зависит лишь последнее слагаемое R_N. Следовательно, оптимальную пару $(\varkappa_N^*, u_N^*)$ получаем из условия минимума R_N. Пусть

$2(N-1)$-мерный вектор $(\vec{\varkappa}_{N-1}, \vec{u}_{N-1})$ выбран. В выражении для риска R_N от вектора $(\varkappa_N, u_N)$ зависит лишь функция Φ_N. Поэтому достаточно рассмотреть минимизацию лишь Φ_N относительно $(\varkappa_N, u_N)$.

Наложим следующее ограничение. Будем искать управляющее устройство в классе систем, обладающих относительно u_n $(n=1, 2, \ldots, N)$ регулярной стратегией. Следовательно, при $n=N$

$$\Gamma_N(u_N \mid \vec{\varkappa}_{N-1}, \varkappa_N = 1, \vec{u}_{N-1}, \vec{y}_{N-1}, \eta_{N-1}, \vec{\Theta}_m) = \delta(u_N - u_N^{1*});$$

$$\Gamma_N(u_N \mid \vec{\varkappa}_{N-1}, \varkappa_N = 0, \vec{u}_{N-1}, \vec{y}_{N-1}, \vec{\Theta}_m) = \delta(u_N - u_N^{0*}), \qquad (15)$$

где u_N^{1*}, u_N^{0*} — оптимальные управления, отвечающие решениям $\varkappa_N = 1$ и $\varkappa_N = 0$ соответственно.

Рассуждая так же, как в [5], находим, что оптимальное управление u_N^{1*} вычисляется из условия минимума по u_N функции α_N, а оптимальное управление u_N^{0*} — из условия минимума по u_N функции β_N. Введем обозначения:

$$\alpha_N^* = \min_{u_N} \alpha_N; \qquad \beta_N^* = \min_{u_N} \beta_N; \qquad \Phi_N^* = \min_{u_N} \Phi_N = \gamma(\varkappa_N = 1 \mid \vec{\varkappa}_{N-1},$$

$$\vec{y}_{N-1}, \vec{u}_{N-1}, \vec{\Theta}_m) \int\limits_{\Omega(\eta_{N-1})} \alpha_N^* \, d\,\Omega + \gamma(\varkappa_N = 0 \mid \vec{\varkappa}_{N-1}, \vec{y}_{N-1}, \vec{u}_{N-1}, \vec{\Theta}_m)\, \beta_N^*.$$

Пусть управляющее устройство обладает относительно решения $\varkappa_n$ также регулярной стратегией. При $n=N$ это означает, что одно из решений $\varkappa_N = 0$ или $\varkappa_N = 1$ выбирается с вероятностью «1»; противоположное решение выбирается с вероятностью «0». Поэтому оптимизация Φ_N^* относительно $\varkappa_N$ сводится к сравнению функций $\int\limits_{\Omega(\eta_{N-1})} \alpha_N^* \, d\,\Omega$ и β_N^* и выбору меньшей из них. При $\int\limits_{\Omega(\eta_{N-1})} \alpha_N^* \, d\,\Omega > \beta_N^*$ принимается решение $\varkappa_N = 0$, а при $\int\limits_{\Omega(\eta_{N-1})} \alpha_N^* \, d\,\Omega < \beta_N^*$ — решение $\varkappa_N = 1$. При равенстве этих функций выбор решения $\varkappa_N$ произволен. В результате такой двойной минимизации образуется функция

$$\Phi_N^{**} = \min_{u_N, \varkappa_N} \Phi_N = \min\left[\beta_N^*, \int\limits_{\Omega(\eta_{N-1})} \alpha_N^* \, d\,\Omega\right].$$

Переходим к определению предпоследней пары $(\varkappa_{N-1}, u_{N-1})$. Пусть $2(N-2)$-мерный вектор $(\vec{\varkappa}_{N-2}, \vec{u}_{N-2})$ выбран. От вектора $(\varkappa_{N-1}, u_{N-1})$ зависит сумма $S_{N-1} = R_{N-1} + R_N^*$, где $R_N^* = \min\limits_{u_N, \varkappa_N} R_N$. Выпишем эту сумму

$$S_{N-1} = \int\limits_{\Omega(\vec{\varkappa}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}, \vec{y}_{N-2})} \prod_{i=1}^{N-2} (\Gamma_i^{\varkappa} \Gamma_i^{u})\, \Phi_{N-1}(\vec{\varkappa}_{N-2}, \vec{y}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}, \vec{\Theta}_m)\, d\,\Omega +$$

$$+ \int\limits_{\Omega(\vec{\varkappa}_{N-1}, \vec{y}_{N-1}, \vec{u}_{N-1})} \prod_{i=1}^{N-1} (\Gamma_i^{\varkappa} \Gamma_i^{u})\, \Phi_N^{**}(\vec{\varkappa}_{N-1}, \vec{y}_{N-1}, \vec{u}_{N-1}, \vec{\Theta}_m)\, d\,\Omega =$$

$$= \int\limits_{\Omega(\vec{x}_{N-2},\ \vec{u}_{N-2},\ \vec{y}_{N-2})} \prod_{i=1}^{N-2} (\Gamma_i^x \Gamma_i^u)\, F_{N-1}(\vec{x}_{N-2}, \vec{y}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}, \vec{\Theta}_m)\, d\Omega, \quad (16)$$

где $F_{N-1} = F_{N-1}(\vec{x}_{N-2}, \vec{y}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}, \vec{\Theta}_m) =$

$$= \gamma(x_{N-1} = 1 \mid \vec{x}_{N-2}, \vec{y}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}, \vec{\Theta}_m) \Big\{ \int\limits_{\Omega(\eta_{N-2},\, u_{N-1})} [\alpha_{N-1} + \Phi_N^{**}(\vec{x}_{N-2}, x_{N-1} = 1,$$

$$\vec{y}_{N-2}, \eta_{N-2}, \vec{u}_{N-1}, \vec{\Theta}_m)]\, \Gamma_{N-1}^u (u_{N-1} \mid \vec{x}_{N-2}, x_{N-1} = 1, \vec{y}_{N-2}, \eta_{N-2},$$

$$\vec{u}_{N-2}, \vec{\Theta}_m)\, d\Omega \Big\} + \gamma(x_{N-1} = 0 \mid \vec{x}_{N-2}, \vec{y}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}, \vec{\Theta}_m) \times$$

$$\times \Big\{ \int\limits_{\Omega(u_{N-1})} [\beta_{N-1} + \int\limits_{\Omega(\varepsilon_{N-2})} \Phi_N^{**}(\vec{x}_{N-2}, x_{N-1} = 0, \vec{y}_{N-2}, \varepsilon_{N-2}, \vec{u}_{N-1}, \vec{\Theta}_m)] \times$$

$$\times \Gamma_{N-1}^u (u_{N-1} \mid \vec{x}_{N-2}, x_{N-1} = 0, \vec{y}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}, \vec{\Theta}_m)\, d\Omega \Big\}.$$

Так как в выражении (16) от вектора (x_{N-1}, u_{N-1}) зависит только функция F_{N-1}, достаточно рассмотреть лишь ее минимизацию относительно (x_{N-1}, u_{N-1}). Введем функции:

$$\mu_{N-1} = \alpha_{N-1} + \Phi_N^{**}(\vec{x}_{N-2}, x_{N-1} = 1, \vec{y}_{N-2}, \eta_{N-2}, \vec{u}_{N-1}, \vec{\Theta}_m);$$

$$\nu_{N-1} = \beta_{N-1} + \int\limits_{\Omega(\varepsilon_{N-2})} \Phi_N^{**}(\vec{x}_{N-2}, x_{N-1}=0, \vec{y}_{N-2}, \varepsilon_{N-2}, \vec{u}_{N-1}, \vec{\Theta}_m)\, d\Omega.$$

В силу регулярности стратегии управляющего устройства относительно u_n при $n = N-1$ от оптимального управления u_{N-1}^{1*} в F_{N-1} зависит лишь функция μ_{N-1}, а от u_{N-1}^{0*} — функция ν_{N-1}.

Из условия минимума этих функций относительно u_{N-1} и находятся отпимальные управления u_{N-1}^{1*}, u_{N-1}^{0*}. Обозначим

$$\mu_{N-1}^* = \min_{u_{N-1}} \mu_{N-1}; \quad \nu_{N-1}^* = \min_{u_{N-1}} \nu_{N-1}; \quad F_{N-1}^* = \min_{u_{N-1}} F_{N-1} =$$

$$= \gamma(x_{N-1} = 1 \mid \vec{x}_{N-2}, \vec{y}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}, \vec{\Theta}_m) \int\limits_{\Omega(\eta_{N-2})} \mu_{N-1}^*\, d\Omega +$$

$$+ \gamma(x_{N-1} = 0 \mid \vec{x}_{N-2}, \vec{y}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}, \vec{\Theta}_m)\, \nu_{N-1}^*.$$

Так как управляющее устройство обладает относительно решения x_n регулярной стратегией, то оптимизация F_{N-1}^* относительно x_{N-1} сводится к сравнению функций $\int\limits_{\Omega(\eta_{N-2})} \mu_{N-1}^*\, d\Omega$ и ν_{N-1}^* и выбору меньшей из них. В результате двойной минимизации образуется функция

$$F_{N-1}^{**} = \min_{u_{N-1},\, x_{N-1}} F_{N-1} = \min \Big[\nu_{N-1}^*, \int\limits_{\Omega(\eta_{N-2})} \mu_{N-1}^*\, d\Omega\Big]. \quad (17)$$

Рассуждая совершенно аналогично, нетрудно показать, что для нахождения оптимальной пары (x_{N-k}, u_{N-k}) $(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ необходимо совершить следующие действия.

1. Построить пару функций:

$$\mu_{N-k} = \alpha_{N-k} + F^{**}_{N-k+1}\,(\vec{x}_{N-k-1},\ x_{N-k} = 1,\ \vec{y}_{N-k-1},$$
$$\eta_{N-k-1},\ \vec{u}_{N-k},\ \vec{\Theta}_m);$$
$$\nu_{N-k} = \beta_{N-k} + \int\limits_{\Omega(\varepsilon_{N-k-1})} F^{**}_{N-k+1}\,(\vec{x}_{N-k-1},\ x_{N-k} = 0,$$
$$\vec{y}_{N-k-1},\ \varepsilon_{N-k-1},\ \vec{u}_{N-k},\ \vec{\Theta}_m)\,d\,\Omega,$$

где F^{**} [illegible] 3. Найти функции μ_{N-k} и ν_{N-k}.

4. Сравнить ν^*_{N-k} и $\int\limits_{\Omega(\eta_{N-k-1})} \mu^*_{N-k}\,d\,\Omega$ и выбрать меньшее значение. При $\nu^*_{N-k} > \int\limits_{\Omega(\eta_{N-k-1})} \mu^*_{N-k}\,d\,\Omega$ принять решение $x_{N-k} = 1$, а при $\nu^*_{N-k} < \int\limits_{\Omega(\eta_{N-k-1})} \mu^*_{N-k}\,d\,\Omega$ — решение $x_{N-k} = 0$. При равенстве этих функций выбор решения x_{N-k} произволен.

Пример. Пусть $\{\eta_n\}$ — случайный процесс, в отсутствие управления отвечающий формуле: $\eta_n = \lambda\,n + h_n$, где $\{h_n\}$ — последовательность независимых случайных величин с неизменной плотностью распределения $P(h_n) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-h_n^2 | 2\sigma^2\}$, а λ — неизвестный случайный параметр. Пусть $C_{1n} = \eta_n^2$; $C_{2n} = u_n^2$; $C_{3n} = x_n$. Априорная плотность вероятности параметра λ подчиняется нормальному закону с известными статистиками $(\lambda_0,\ \sigma_1^2)$, а процесс $\{\eta_n\}$ начинается из случайного начального условия η_0, распределенного по нормальному закону со статистиками $(0,\ \sigma_2^2)$. На первом такте всегда принимается решение $x_1 = 1$, т. е. определяется начальное условие η_0. Примем для простоты, что при $x_i = 0$ $u_i^* = 0$ и что $N = 2$. Тогда синтез оптимальной стратегии контроля и управления сводится к нахождению вектора $(x_2^*,\ u_2^*,\ u_1^*)$.

Опуская промежуточные выкладки, приведем сразу окончательный результат. Оказывается, что в данном примере возможны две стратегии контроля и управления.

$$1)\ \{x_1^* = 1,\ u_1^* = -0{,}6\,\eta_0 - 0{,}8\,\lambda_0\};$$
$$x_2^* = 1,\ u_2^* = -\frac{1}{2}(u_1 + \eta_0) - \frac{\sigma^2\lambda_0 + \sigma_1^2(\eta_1 - \eta_0 - u_1^*)}{\sigma^2 + \sigma_1^2}.$$

Ей отвечает полный риск $R_{11} = 2 + 2\sigma^2 + 3\sigma_1^2 + \dfrac{2\sigma_1^2\sigma^2}{\sigma_1^2 + \sigma^2} + 1{,}4\,\lambda_0^2 + 0{,}6\,\sigma_2^2$.

$$2)\ \left\{x_1^* = 1,\ u_1^* = -\frac{2}{3}\gamma_{10} - \lambda_0;\ x_2^* = 0,\ u_2^* = 0\right\}$$

с полным риском $R_{10} = 1 + 2\sigma^2 + 5\sigma_1^2 + 2\lambda_0^2 + \frac{2}{3}\sigma_2^2$.

Эффект адаптации в данной системе приводит к уменьшению априорной дисперсии σ_1^2 за счет изучения неизвестного параметра λ. Примем $\lambda_0=\sigma=\sigma_2=1$ и изучим зависимость полного риска от σ_1^2. При этих значениях параметров

$$R_{11} = 6 + 3\sigma_1^2 + \frac{2\sigma_1^2}{1+\sigma_1^2}; \quad R_{10} = 5\frac{2}{3} + 5\sigma_1^2.$$

Графики зависимостей R_{11} и R_{10} от σ_1^2 изображены на рис. 2. Штриховые линии соответствуют отдельным рискам: кривая *1* — риску R_{11}, кривая *2* — риску R_{10}. Из рис. 2 видно, что при $0 \leqslant \sigma_1^2 \leqslant 1/2$ оптимальной является вторая стратегия, а при $\sigma_1^2 \geqslant 1/2$ — первая. Сплошной линией на рис. 2 изображен график зависимости риска $R_{\Sigma\,\text{опт}}$ оптимальной стратегии от значений σ_1^2.

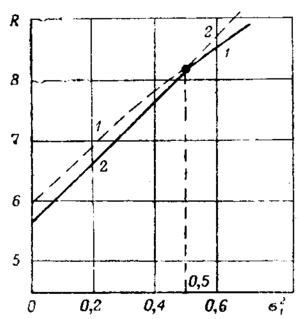

Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Коуден. Статистические методы контроля качества. М., Физматгиз, 1961.
2. J. A. Bather. Control Charts and the Minimization of Costs.— Journal of the Royal Stat. Society, ser. B., 1963, № 1.
3. Р. Л. Стратонович. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М., Изд-во МГУ, 1966.
4. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Изд. 3. М., Физматгиз. 1962.
5. А. А. Фельдбаум. Основы теории оптимальных автоматических систем. Изд. 2. М., «Наука», 1966.
6. Р. Л. Стратонович. Экстремальные задачи теории информации и динамическое программирование.— Техническая кибернетика, 1967, № 5.

Поступила в редакцию
9 февраля 1968 г.,
окончательный вариант —
10 марта 1969 г.