АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1969

УДК 621.317.799—503.55

В. Я. ПИВКИН

(Новосибирск)

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ КОНТРОЛЯ РАБОТОСПОСОБНОСТИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ЗАТРАТАХ НА КОНТРОЛЬ

Выбор оптимального набора контролируемых параметров является одной из основных задач, возникающих при проектировании автономных или встроенных устройств автоматического контроля работоспособности радиоэлектронных систем. Для ряда сложных систем эту задачу можно сформулировать следующим образом.

Имеется радиоэлектронная система, для которой определена совокупность $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m\}$ взаимосвязанных параметров. Для значений этих параметров установлены пределы допустимых отклонений (зоны допуска).

Система содержит N элементов $\{1, 2, \ldots, N\}$, отказы которых вызывают выход из зоны допуска значения, по крайней мере, одного параметра из Π. Известно, что априорная вероятность отказа i-го элемента равна p_i.

Для каждого параметра π_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ определено подмножество S_i $(S_i \subseteq \{1, 2, \ldots, N\})$ элементов, охваченных контролем этого параметра, т. е. подмножество таких элементов, что отказ хотя бы одного из них влечет за собой выход из зоны допуска значения этого параметра. Система работоспособна, если она не содержит отказавших элементов.

Пусть ω — некоторый набор параметров из Π $(\omega \subseteq \Pi)$. Совокупность элементов, охваченных контролем всех параметров из ω, равна

$$S(\omega) = \bigcup_{\pi_i \in \omega} S_i.$$

Обозначим через $p(\omega)$ вероятность того, что значения всех параметров из ω находятся в соответствующих зонах допуска.

Если в системе возможен отказ любого одного и только одного элемента (т. е. $\sum_{i=1}^{N} p_i + p_0 = 1$, где p_0 — априорная вероятность работоспособности системы), то

$$p(\omega) = 1 - \sum_{i \in S(\omega)} p_i.$$

Если же в системе возможны независимые отказы произвольного числа элементов, то

$$p_0 = \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i); \; p(\omega) = \prod_{i \in S(\omega)} (1 - p_i).$$

Допустим, что работоспособность системы определяется по результатам контроля только тех параметров, которые входят в набор ω (т. е. система считается работоспособной, если все параметры из ω находятся в соответствующих зонах допуска). Тогда апостериорная вероятность работоспособности системы равна $B(\omega) = \frac{p_0}{p(\omega)}$. Очевидно, $B(\omega) \leqslant 1$.

Известны затраты τ_i ($\tau_i > 0$) времени или средств на контроль i-го ($1 \leqslant i \leqslant m$) параметра системы. Предполагается, что общие затраты на контроль всех параметров из набора ω равны сумме затрат на контроль каждого отдельного параметра, входящего в этот набор, т. е. $\tau(\omega) = \sum_{\pi_i \in \omega} \tau_i$.

Задано ограничение τ ($\tau_i < \tau$) на величину общих затрат на контроль. Требуется найти такой (оптимальный) набор параметров, для которого апостериорная вероятность работоспособности системы достигает наибольшего значения среди всех наборов параметров, удовлетворяющих заданному ограничению $\tau(\omega) \leqslant \tau$. Частный случай этой задачи, когда подмножества S_i попарно различны (т. е. параметры системы не взаимосвязаны), рассмотрен в работе*.

Предлагаемый ниже алгоритм решения поставленной задачи основан на сокращенном переборе различных наборов параметров. Сокращение перебора достигается использованием правил, позволяющих исключать заведомо неоптимальные наборы. В алгоритме каждому просматриваемому набору ω_k сопутствует набор параметров γ_k ($\gamma_k \cap \omega_k = \varnothing$, где $\varnothing$ — пустое множество), называемый множеством возможных приращений. Определена операция выбора из γ_k одного параметра $\pi(\gamma_k, \omega_k)$, называемого предпочтительным. Если при просмотре набора ω_k не используются правила сокращения перебора, то следующим просматриваемым набором будет $\omega_{k+1} = \omega_k \cup \pi(\gamma_k, \omega_k)$; при этом γ_k присваивается значение $\gamma_k \setminus \pi(\gamma_k, \omega_k)$, после чего γ_{k+1} присваивается новое значение γ_k (т. е. $\gamma_k := \gamma_k \setminus \pi(\gamma_k, \omega_k)$, $\gamma_{k+1} := \gamma_k$, где $:=$ — оператор присвоения значения). Действие правил сокращения перебора заключается либо в обращении в пустые множества множеств возможных приращений, либо в их урезании, т. е. удалении некоторого числа параметров. Обращение в пустое множество набора γ_k, содержащего l параметров, исключает из просмотра 2^l наборов, которые могут быть сформированы из ω_k добавлением различных комбинаций параметров из γ_k.

Перебор наборов параметров осуществляется по следующей схеме.

1. Начальные условия $\Omega = \{\omega_0\}$, $\Gamma = \{\gamma_0\}$, где $\omega_0 = \varnothing$; $\gamma_0 = \Pi$.

2. Сформированы последовательности $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_k\}$ и $\Gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_k\}$. В Ω просматривается набор с наибольшим номером, т. е. ω_k. При этом вычисляются значения $B(\omega_k)$, $\tau(\omega_k)$, проверяются условия для применения правил сокращения перебора. Если какие-либо из правил применимы, то соответствующие множества возможных приращений обращаются в пустые или урезаются. Из последовательности Γ удаляются все пустые множества и одновременно из Ω удаляются

* В. Я. Пивкин, Л. С. Тимонен. О выборе контролируемых параметров.— Стандарты и качество, 1967, № 12.

соответствующие им наборы. Если в пустые множества обратились все наборы из Г, то перебор окончен. В противном случае осуществляется переход к пункту 3.

3. Имеются последовательности $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_n\}$ и $\Gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\}$. Вычисляется $\pi(\gamma_n, \omega_n)$. Полагается: $\omega_{n+1} := \omega_n \cup \pi(\gamma_n, \omega_n)$, $\gamma_n := \gamma_n \setminus \pi(\gamma_n, \omega_n)$, $\gamma_{n+1} := \gamma_n$, после чего для последовательностей $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}\}$ и $\Gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}\}$ осуществляется переход к пункту 2. Заметим, что длина последовательностей Ω и Γ на любом этапе перебора не превосходит m, где m — число параметров в П.

В случае, когда вообще отсутствуют какие-либо правила сокращения перебора, по предложенной схеме будут просмотрены все возможные наборы параметров. Поэтому при наличии правил любой набор будет либо просмотрен, либо исключен по какому-либо из правил и, следовательно, по окончании перебора оптимальный набор будет найден.

Пусть на некотором этапе перебора сформированы последовательности $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_k\}$, $\Gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_k\}$ и просматривается набор ω_k. Обозначим через B наибольшее значение функции $B(\omega)$ среди уже просмотренных наборов, удовлетворяющих условию $\tau(\omega) \leqslant \tau$. Тогда справедливы следующие правила сокращения перебора.

Правило 1. Если $\tau(\omega_k) < \tau$ и $\gamma_k \neq \varnothing$, то из γ_k удаляются все параметры π_i, для которых выполняется условие $\tau_i > (\tau - \tau(\omega_k))$. Использование этого правила приводит к тому, что на любом этапе перебора все наборы параметров из последовательности Ω удовлетворяют условию $\tau(\omega) \leqslant \tau$. Таким образом, из просмотра исключаются наборы, для которых $\tau(\omega) > \tau$.

Правило 2. Если $\tau(\omega_k) \leqslant \tau$ и $\gamma_k = \varnothing$, то в последовательности Г полагаются равными $\varnothing$ все множества возможных приращений γ_i, для которых выполняется условие $\omega_i \cup \gamma_i \subseteq \omega_k$.

Для сокращения перебора можно использовать правила, основанные на оценке наибольшего значения величины $B(\omega)$ среди наборов, которые удовлетворяют условию $\tau(\omega) \leqslant \tau$ и могут быть сформированы из ω_k добавлением комбинаций параметров из γ_k. Простейшей оценкой является величина $B(\omega_k \cup \gamma_k)$. Эффективное сокращение на некоторых этапах перебора достигается использованием следующего правила.

Правило 3. Если $B(\omega_k \cup \gamma_k) \leqslant B$, то в Г полагаются равными $\varnothing$ все γ_i, удовлетворяющие условию $\omega_i \cup \gamma_i \subseteq \omega_k \cup \gamma_k$. Пусть $\gamma_k \neq \varnothing$. Параметр $\pi(\gamma_k, \omega_k)$ $(\pi(\gamma_k, \omega_k) \in \gamma_k)$ назовем предпочтительным, если он обеспечивает наибольшее, отличное от нуля, значение величины

$$\lambda(\pi_i, \omega_k) = \frac{B(\omega_k \cup \pi_i) - B(\omega_k)}{\tau_i}$$

среди всех параметров π_i, входящих в γ_k. Для того чтобы выбор предпочтительного параметра был однозначным, условимся в случае, когда γ_k содержит несколько параметров, обеспечивающих наибольшее значение величины $\lambda(\pi_i, \omega_k)$, называть среди них предпочтительным параметр с наименьшим номером. Может оказаться, что для всех параметров из γ_k величина $\lambda(\pi_i, \omega_k)$ равна нулю. В этом случае предпочтительного параметра не существует.

Пусть из γ_k выделен предпочтительный параметр $\pi(\gamma_k, \omega_k)$. Введем функцию

$$\Phi(\omega_k) = B(\omega_k) + \lambda(\pi(\gamma_k, \omega_k), \omega_k)(\tau - \tau(\omega_k)).$$

Поскольку $\lambda(\pi(\gamma_k, \omega_k), \omega_k)$ является наибольшим удельным приращением функции $B(\omega)$ среди всех параметров из γ_k, то, если $\tau(\omega_k) < \tau$, величина $\Phi(\omega_k)$ является верхней границей значений $B(\omega)$ для всех ω, сформированных из ω_k с помощью множества γ_k и удовлетворяющих условию $\tau(\omega) \leqslant \tau$.

Справедливы следующие правила.

Правило 4. Если $\tau(\omega_k) < \tau$, в множестве γ_k выделен предпочтительный параметр и $\Phi(\omega_k) \leqslant B$, то $\gamma_k := \varnothing$.

Правило 5. Если $\tau(\omega_k) < \tau$ и в γ_k нет предпочтительного параметра (т. е. для всех $\pi_i \in \gamma_k$ выполняется $\lambda(\pi_i, \omega_k) = 0$), то в пустые множества обращаются все γ_j из Γ, удовлетворяющие условию $\omega_j \cup \gamma_j \subseteq \omega_k \cup \gamma_k$.

Заметим, что если $\tau(\omega_k) = \tau$, то на предыдущем этапе перебора величина $\Phi(\omega_{k-1})$ равнялась $B(\omega_k)$, т. е. после просмотра набора ω_k выполняется условие $\Phi(\omega_{k-1}) \leqslant B$. Поэтому справедливо следующее правило.

Правило 6. Если $\tau(\omega_k) = \tau$, то $\gamma_k := \varnothing$ и $\gamma_{k-1} := \varnothing$. Набор ω_k назовем избыточным, если в нем содержится параметр π_i такой, что $B(\omega_k \setminus \pi_i) = B(\omega_k)$. Справедливо следующее правило.

Правило 7. Если установлена избыточность набора ω_k, то $\gamma_k := \varnothing$.

Из определения избыточности набора параметров ω_k следует, что если ω_k избыточен, то $S(\omega_k \setminus \pi_i) = S(\omega_k)$. Обозначим через δ_k множество элементов системы ($\delta_k \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$), охваченных контролем двух или более параметров из ω_k. Тогда для проверки набора ω_k на избыточность достаточно проверить условие $S_i \subseteq \delta_k$ для всех параметров из ω_k. Если указанное условие выполняется хотя бы для одного из параметров набора ω_k, то ω_k избыточен. Изложенная процедура понимается как проверка набора на избыточность. Для ее применения в процессе перебора наряду с последовательностями Ω и Γ запоминается последовательность $D = \{\delta_0, \ldots, \delta_k\}$. Формулы для формирования множеств δ_k приведены непосредственно в алгоритме.

На основе изложенных выше схемы перебора и правил сокращения предлагается следующий алгоритм поиска оптимального набора контролируемых параметров.

Алгоритм. Начальные условия $\omega_0 = \varnothing, \gamma_0 = \Pi, \delta_0 = \varnothing, \omega^0 = \varnothing, B = 0$.

I. Вычисляется $\pi(\Pi, \varnothing)$. Полагается, что $\omega_1 = \pi(\Pi, \varnothing)$, $\gamma_0 = \gamma_1 = \Pi / \pi(\Pi, \varnothing)$, $\delta_1 = \varnothing$, $k = 1$, и для $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$, $\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1\}$, $D = \{\delta_0, \delta_1\}$ осуществляется переход к пункту II.

II. Для последовательностей $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_k\}$, $\Gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_k\}$; $D = \{\delta_0, \ldots, \delta_k\}$ выполняются следующие операции:

1) вычисляются $B(\omega_k)$ и $\tau(\omega_k)$,

2) если $B(\omega_k) > B$, то $\omega^0 := \omega_k$, $B := B(\omega_k)$,

3) если $\tau(\omega_k) = \tau$, то $k := k - 2$ и осуществляется переход к пункту IV, иначе

4) если $\gamma_k = \varnothing$, то осуществляется переход к пункту III, иначе

5) из γ_k удаляются все параметры π_i, для которых $\tau_i > (\tau - \tau(\omega_k))$; если после этого $\gamma_k \neq \varnothing$, то $k := k - 1$ и осуществляется переход к пункту IV, иначе

6) набор ω_k проверяется на избыточность; если ω_k избыточен, то $k := k - 1$ и осуществляется переход к пункту IV, иначе

7) для всех параметров π_i, входящих в γ_k, вычисляются величины $\lambda(\pi_i, \omega_k)$,

8) если для всех параметров из γ_k имеет место $\lambda(\pi_i, \omega_k) = 0$, то осуществляется переход к пункту III, иначе

9) из γ_k удаляются все параметры, для которых $\lambda(\pi_i, \omega_k) = 0$; среди оставшихся параметров выделяется предпочтительный;

10) если $B(\omega_k) < B$, то вычисляется $\Phi(\omega_k)$, и если $\Phi(\omega_k) \leqslant B$, то $k := k-1$ и осуществляется переход к пункту IV, иначе

11) $\omega_{k+1} := \omega_k \cup \pi(\gamma_k, \omega_k)$, $\delta_{k+1} := \delta_k \cup \{S(\omega_k) \cap S(\pi(\gamma_k, \omega_k))\}$, $\gamma_k := \gamma_k \setminus \pi(\gamma_k, \omega_k)$, $\gamma_{k+1} := \gamma_k$, $k := k+1$ и для $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_k\}$, $\Gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_k\}$, $D = \{\delta_0, \ldots, \delta_k\}$ выполняются операции пункта II.

III. Для последовательностей $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_k\}$, $\Gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_k\}$, $D = \{\delta_0, \ldots, \delta_k\}$ выполняются следующие операции:

1) среди чисел $i = k, k-1, \ldots, 0$ отыскивается наибольшее число l, для которого не выполняется условие $\omega_i \cup \gamma_i \subseteq \omega_k \cup \gamma_k$; если $\omega_i \cup \gamma_i \subseteq \subseteq \omega_k \cup \gamma_k$ для всех $i = k, k-1, \ldots, 0$, то осуществляется переход к пункту V, иначе

2) $k := l$ и для $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_k\}$, $\Gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_k\}$, $D = \{\delta_0, \ldots, \delta_k\}$ осуществляется переход к пункту IV.

IV. Для последовательности $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_k\}$, $\Gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_k\}$, $D = \{\delta_0, \ldots, \delta_k\}$ выполняются следующие операции:

1) вычисляется величина $B(\omega_k \cup \gamma_k)$,

2) если $B(\omega_k \cup \gamma_k) \leqslant B$, то осуществляется переход к пункту III, иначе

3) выделяется $\pi(\gamma_k, \omega_k)$, $\omega_{k+1} := \omega_k \cup \pi(\gamma_k, \omega_k)$, $\delta_{k+1} := := \delta_k \cup \{S(\omega_k) \cap S(\pi(\gamma_k, \omega_k))\}$, $\gamma_k := \gamma_k \setminus \pi(\gamma_k, \omega_k)$, $\gamma_{k+1} := \gamma_k$, $k := k+1$ и для $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_k\}$, $\Gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_k\}$, $D = \{\delta_0, \ldots, \delta_k\}$ осуществляются операции пункта II.

V. Набор параметров ω^0 является оптимальным решением.

Пусть в системе возможен отказ любого одного и только одного элемента. Из анализа выражения для $B(\omega)$ следует, что в этом случае оптимальным является набор параметров, обеспечивающий наибольшее значение функции $T(\omega) = \sum_{i \in S(\omega)} p_i$ среди всех наборов, удовлетворяющих условию $\tau(\omega) \leqslant \tau$. Все правила сокращения перебора и алгоритм остаются справедливыми, если вместо функции $B(\omega)$ рассматривать функцию $T(\omega)$. При этом упрощаются вычисления величин $\lambda(\pi_i, \omega_k)$ и, следовательно, облегчается поиск предпочтительного параметра. Поэтому при решении конкретной задачи можно вместо $B(\omega)$ рассматривать $T(\omega)$ (или временно положить $B(\omega) = T(\omega)$), а после отыскания оптимального набора ω^0 вычислить для него $B(\omega^0)$. Если в системе возможны независимые отказы произвольного числа элементов, замена функции $B(\omega)$ функцией $T(\omega)$ недопустима.

Предложенный алгоритм поиска оптимального набора параметров может быть запрограммирован на ЭЦВМ с использованием представления наборов параметров и элементов в виде булевых векторов.

Для иллюстрации работы алгоритма рассмотрим следующий пример. Пусть система содержит пять элементов $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ и неработоспособность системы вызывается отказом любого одного элемента с вероятностью $p_1 = 0{,}003$, $p_2 = 0{,}005$, $p_3 = p_4 = p_5 = 0{,}004$. Априорная вероятность работоспособности системы равна $p_0 = 0{,}98$.

Система характеризуется пятью параметрами $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}$.

Заданы подмножества элементов, охваченных контролем данного параметра: $S_1 = \{a_3\}$, $S_2 = \{a_1\}$, $S_3 = \{a_2, a_4\}$, $S_4 = \{a_2, a_5\}$, $S_5 = \{a_2, a_3\}$. Величины затрат на контроль каждого параметра соответственно равны $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 2$, $\tau_4 = \tau_5 = 3$. Общие затраты на контроль системы не должны превышать величины $\tau = 7$. Поскольку в системе возможен отказ только одного элемента, при отыскании оптимального набора параметров временно полагается $B(\omega) = T(\omega)$.

После выполнения операций пункта I алгоритма имеем: $\omega_0 = \varnothing$, $\omega_1 = (\pi_3)$, $\gamma_0 = \gamma_1 = (\pi_1, \pi_2, \pi_4, \pi_5)$, $\delta_0 = \delta_1 = \varnothing$, $\omega^0 = \varnothing$, $B = 0$, $k = 1$. Дальнейшая работа алгоритма по числу обращений к пункту II может быть разбита на следующие пять шагов:

Шаг 1. Вычисляются $\tau(\omega_1)=2$, $B(\omega_1)=0{,}009$. Полагаем $\omega^0=(\pi_3)$, $B=0{,}009$. Выделяется $\pi(\gamma_1, \omega_1)=\pi_1$. Принимаем $\omega_2=(\pi_3, \pi_1)$, $\gamma_1=\gamma_2=(\pi_2, \pi_4, \pi_5)$, $\delta_2=\varnothing$, $k=2$.

Шаг 2. Вычисляются $\tau(\omega_2)=4$, $B(\omega_2)=0{,}013$. Полагаем $\omega^0=(\pi_3, \pi_1)$, $B=0{,}013$. Выделяется $\pi(\gamma_2, \omega_2)=\pi_2$. Принимаем $\omega_3=(\pi_3, \pi_1, \pi_2)$, $\gamma_2=\gamma_3=(\pi_4)$, $\delta_3=\varnothing$, $k=3$.

Шаг 3. Вычисляются $\tau(\omega_3)=6$, $B(\omega_3)=0{,}016$. Полагаем $\omega^0=(\pi_3, \pi_1, \pi_2)$, $B=0{,}016$. Так как $\tau_4>(\tau-\tau(\omega_3))$, то $k=2$. Поскольку $B(\omega_2 \cup \gamma_2)>B$, выделяем $\pi(\gamma_2, \omega_2)=\pi_4$. Полагаем $\omega_3=\{\pi_3, \pi_1, \pi_4\}$, $\gamma_2=\gamma_3=\varnothing$, $\delta_3(a_2)$, $k=3$.

Шаг 4. Вычисляем $\tau(\omega_3)=7$, $B(\omega_3)=0{,}017$. Полагаем $\omega^0=(\pi_3, \pi_1, \pi_4)$, $B=0{,}017$. Так как $\tau(\omega_3)=\tau$, то $k=1$. Поскольку $B(\omega_1 \cup \gamma_1)>B$, выделяем $\pi(\gamma_1, \omega_1)=\pi_2$. Принимаем $\omega_2(\pi_3, \pi_2)$, $\gamma_1=\gamma_2=(\pi_4, \pi_5)$, $\delta_2=\varnothing$, $k=2$.

Шаг 5. Вычисляем $\tau(\omega_2)=4$, $B(\omega_2)=0{,}012$. Выделяем $\pi(\gamma_2, \omega_2)=\pi_4$. Находим $\Phi(\omega_2)=0{,}016$. Так как $\Phi(\omega_2)<B$, то $k=1$. Поскольку $B(\omega_1 \cup \gamma_1)=B$, проверяем условие $\omega_0 \cup \gamma_0 \subseteq \omega_1 \cup \gamma_1$. Так как условие не выполняется, то $k=0$. Вычисляем $B(\omega_0 \cup \gamma_0)$. Так как $B(\omega_0 \cup \gamma_0)<B$, то набор ω^0 является решением.

Таким образом, оптимальным набором контролируемых параметров является $\omega^0=(\pi_1, \pi_3, \pi_4)$. Апостериорная вероятность работоспособности системы при условии, что все параметры из ω^0 находятся в соответствующих зонах допуска, равна $B(\omega^0)=0{,}997$.

Поступила в редакцию
11 июня 1968 г.