

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

УДК 621.372.44

Г. А. АКСЕНОВ

(Новосибирск)

О РАЗДЕЛЬНОМ ИЗМЕРЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ RC- И RL-СХЕМ ПРИ ПОМОЩИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работах [1, 2] было дано решение задачи раздельного определения (идентификации) характеристик нелинейных элементов эквивалентных RC- и RL-схем с использованием в «обратном порядке» методики вычисления интерполяционных квадратур Гаусса. При этом необходимо было осуществлять измерения амплитуд синфазной и квадратурной составляющих первой гармоники выходного сигнала и постоянных составляющих, обусловленных каждым из нелинейных элементов, или амплитуд синфазной и квадратурной составляющих первой и второй гармоник. Там же было дано обоснование выбора режима измерения указанных выше параметров в зависимости от вида эквивалентной схемы двухполюсника. При использовании этой методики степень интерполяционных полиномов, приближающих искомые, обычно гладкие характеристики, выбиралась равной номеру высшей гармоники спектра выходного сигнала. При этом мы получали теоретически точное решение задачи.

Теперь остановимся на ином подходе. Будем опираться на общее свойство так называемых описывающих функций* каждого из нелинейных элементов, входящих в эквивалентную схему. Пусть заданы эквивалентные RC- или RL-схемы с последовательным или параллельным соединением нелинейных элементов. Вольт-амперная (f_R), вольт-кулоновая (f_C) и вебер-амперная (f_L) характеристики — непрерывные функции, не изменяющиеся от величины амплитуды испытательного синусоидального сигнала и удовлетворяют условию $f(0) = 0$. Полагаем, что описывающие функции также непрерывны на основном интервале и удовлетворяют условию Липшица. Требуется раздельно определить каждую нелинейную характеристику.

Ниже дадим подробное изложение решения задачи в случае последовательной эквивалентной RC-схемы. Для других вариантов схем приведем окончательные выражения, которые могут быть получены аналогичным способом.

* Под описывающей функцией 1-го порядка будем понимать зависимость амплитуды 1-й гармоники выходного сигнала от амплитуды входного гармонического сигнала. В нашем случае описывающая функция является комплексной.

Испытательный сигнал прием синусоидальным. Необходимые измерения будем выполнять для последовательных RC - и RL -схем в режиме заданного тока, для параллельных — в режиме заданного напряжения. Соответствующие режимы для RC - и RL -схем легко обеспечить путем включения последних в цепь глубокой отрицательной обратной

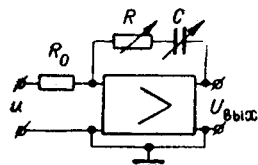


Рис. 1.

связи усилителей с большим коэффициентом усиления и высокоомным входом, т. е. как это осуществлялось в [1, 2]. Для рассматриваемой эквивалентной RC -схемы способ задания режима регулируемого тока показан на рис. 1, где $u = U \sin \theta$ ($\theta = \omega t$) — регулируемый источник входного напряжения. Тогда в установившемся режиме ток в RC -цепи будет равен $i = I \sin \theta$ ($I = \frac{U}{R_0}$). Напряжение на выходе усилителя составит

$$U_{\text{вых}}(t) = f_R(I \sin \theta) + f_C(Q \cos \theta) \quad \left(Q = \frac{I}{\omega} \right). \quad (1)$$

Запишем выражения для описывающих функций элемента R по синфазной составляющей первой гармоники и по постоянной составляющей, обусловленной этим элементом:

$$\left\{ \begin{aligned} a_{1(R)}(I) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_R(I \sin \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f_R(I \sin \theta) - f_R(-I \sin \theta)] \sin \theta d\theta; \quad (2a) \\ a_{0(R)}(I) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_R(I \sin \theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f_R(I \sin \theta) + f_R(-I \sin \theta)] d\theta, \quad (2b) \end{aligned} \right.$$

и описывающих функций элемента C по квадратурной составляющей первой гармоники и постоянной составляющей, обусловленной C :

$$\left\{ \begin{aligned} b_{1(C)}(Q) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_C(Q \cos \theta) \cos \theta d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f_C(Q \sin \gamma) - f_C(-Q \sin \gamma)] \sin \gamma d\gamma; \quad (3a) \\ b_{0(C)}(Q) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_C(Q \cos \theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f_C(Q \sin \gamma) + f_C(-Q \sin \gamma)] d\gamma \quad \left(\gamma = \theta + \frac{\pi}{2} \right). \quad (3b) \end{aligned} \right.$$

Из выражений (2а)—(3б) следует, что для определения искомым функций f_R, f_C необходимо разрешить интегральные уравнения (2а)—(3б).

Напомним [3, 4], что так называемое интегральное уравнение Шлёмилля

$$g(I) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(I \sin \theta) d\theta \quad (4)$$

имеет единственное непрерывное решение (если $g(I)$ имеет непрерывную производную), которое задается формулой

$$p(I) = g(0) + I \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(I \sin \theta) d\theta. \quad (5)$$

Как видим, выражения (2б) и (3б) совпадают с (4) и в соответствии с (5) их решения могут быть записаны в виде:

$$f_R(I) + f_R(-I) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} I a'_{0(R)}(I \sin \theta) d\theta; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} f_C(Q) + f_C(-Q) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q b'_{0(C)}(Q \sin \gamma) d\gamma = \\ &= -2 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} Q f'_0(Q \cos \theta) d\theta \quad (a_{0(R)} = b_{0(C)}(0) = 0). \end{aligned} \quad (7)$$

Каждое из уравнений (2а) и (3б) также сводится к уравнению Шлёмилля. Например, дифференцируя (4) по параметру I

$$g'(I) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p'(I \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (8)$$

и сопоставляя полученное выражение (8) с (2а), заключаем, что при $g'(I) = a_{1(R)}(I)$

$$p'(I \sin \theta) = f_R(I \sin \theta) - f_R(-I \sin \theta) \quad (9)$$

и при производной от $p(I)$ (5) по параметру I

$$p'(I) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dI} [I g'(I \sin \theta)] d\theta \quad (10)$$

решение интегрального уравнения (2а) можно записать так:

$$f_R(I) - f_R(-I) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dI} [I a_{1(R)}(I \sin \theta)] d\theta. \quad (11)$$

Рассуждая аналогично, из (3а) найдем

$$\begin{aligned} f_C(Q) - f_C(-Q) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dQ} [Q b_{1(C)}(Q \sin \gamma)] d\gamma = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dQ} [Q b_{1(C)}(Q \cos \theta)] d\theta, \end{aligned} \quad (12)$$

где по-прежнему $Q = \frac{I}{\omega}$; $\gamma = \theta + \frac{\pi}{2}$. Теперь при помощи выражений (6), (7) и (11), (12) нетрудно найти искомые характеристики нелинейных элементов рассматриваемого двухполюсника. Складывая их попарно [(6) и (1), (7) и (12)], получим:

$$f_R(I) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dI} [I a_{1(R)}(I \sin \theta)] + I a'_{0(R)}(I \sin \theta) \right\} d\theta; \quad (13)$$

$$f_C(Q) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dQ} [Q b_{1(C)}(Q \cos \theta)] + Q b'_{0(C)}(Q \cos \theta) \right\} d\theta. \quad (14)$$

Отметим, что если искомые характеристики симметричны, т. е. $f_R(I) = f_R(-I)$, $f_C(\theta) = f_C(-\theta)$, то они могут быть определены непосредственно из выражений (11) и (12) только по результатам измерения синфазной и квадратурной составляющих первой гармоники выходного сигнала в зависимости от амплитуды входного. Если функции f_C и f_R этому условию не удовлетворяют, то они соответственно находятся при помощи соотношений (13) и (14). При этом в эксперименте должна быть предусмотрена возможность раздельного измерения в выходном сигнале постоянных составляющих $a_{0(R)}(I)$ и $b_{0(C)}(Q)$, обусловленных каждым из нелинейных элементов. Здесь мы ограничимся кратким указанием на принципиальную возможность выполнения такого измерения. Для этого достаточно в начале при заданном I выбрать частоту ω_1 испытательного сигнала в несколько раз выше рабочей и измерить постоянную составляющую $U_{\text{вых}}(t)$. При этом диапазон изменения заряда Q на емкости резко уменьшается ($Q = \frac{I}{\omega}$), уменьшается и вклад емкости в образование постоянной составляющей. Таким образом, можно полагать, что измеренная постоянная составляющая выходного сигнала представляет только $a_{0(R)}(I)$. Переходя затем к измерению на рабочей частоте ω , легко определить ту часть постоянной составляющей, которая обусловлена нелинейной емкостью.

Рассмотренная выше задача также может быть решена при помощи интегрального уравнения Абеля

$$g(x) = \int_0^x \frac{p(\xi)}{(x-\xi)^\mu} d\xi \quad (0 < \mu < 1, a \leq x \leq b), \quad (15)$$

непрерывное решение которого (если $g'(x)$ — непрерывная функция и $g(a)=0$) известно [4]:

$$p(\xi) = \frac{\sin \mu \pi}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{g(x)}{(\xi-x)^{1-\mu}} dx. \quad (16)$$

В самом деле, если в выражении (2а) осуществить замену переменных

$$i = I \sin \Theta = \sqrt{\xi}, \quad I = \sqrt{x}, \quad \sin \Theta = \sqrt{\frac{\xi}{x}}, \quad d\Theta = \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}\sqrt{x-\xi}} \quad (17)$$

и подставить эти значения в (2а), то получим интегральное уравнение Абеля

$$\pi \sqrt{x} a_{1(R)}(\sqrt{x}) = \int_0^x \frac{[f_R(\sqrt{\xi}) - f_R(-\sqrt{\xi})]}{\sqrt{x-\xi}} d\xi, \quad (18)$$

решение которого в соответствии с формулой (16) в первоначальных переменных определяется соотношением

$$f_R(i) - f_R(-i) = \frac{1}{i} \frac{d}{di} \int_0^i \frac{I^2 a_{1(R)}(I)}{\sqrt{i^2 - I^2}} dI. \quad (19)$$

Такая же замена переменных, как и (17), приводит решение уравнения (2б) к выражению

$$f_R(i) + f_R(-i) = \frac{d}{di} \int_0^i \frac{2I a_{0(R)}(I)}{\sqrt{i^2 - I^2}} dI, \quad (20)$$

которое совместно с (19) дает формулу для искомой характеристики f_R в несколько отличном от (19) виде:

$$f_R(i) = \frac{1}{2i} \frac{d}{di} \int_0^i \frac{I^2 a_{1(R)}(I)}{\sqrt{i^2 - I^2}} dI + \frac{d}{di} \int_0^i \frac{I a_{0(R)}(I)}{\sqrt{i^2 - I^2}} dI. \quad (21)$$

Ясно, что для определения симметричной характеристики элемента достаточно соотношения (19).

Выражение для второй искомой функции f_C находится из уравнений (3а), (3б) таким же способом [см. (17)] и аналогично (21):

$$f_C(q) = \frac{1}{2q} \frac{d}{dq} \int_0^q \frac{Q^2 b_{1(C)}(\omega Q)}{\sqrt{q^2 - Q^2}} dQ + \frac{d}{dq} \int_0^q \frac{Q b_{0(C)}(\omega Q)}{\sqrt{q^2 - Q^2}} dQ. \quad (22)$$

Для параллельной эквивалентной RC -схемы способ задания режима регулируемого напряжения иллюстрируется рис. 2, где $u = U \sin \Theta$ — регулируемый источник входного напряжения. Осуществляя в установившемся режиме измерения синфазной $\hat{a}_{1(R)}$ и квадратурной $\hat{b}_{1(C)}$ составляющих первой гармоники выходного сигнала

$$U_{\text{вых}}(t) = R_0 \left[f_R(U \sin \Theta) + \frac{d}{dt} f_C(U \sin \Theta) \right], \quad (23)$$

а также постоянной составляющей $\hat{a}_0(R)$, обусловленной элементом R , получим искомую характеристику f_R при помощи выражений (13) и

(21), заменив в последних I на U ; i на u , $a_{1(R)}$ на $\frac{\hat{a}_{1(R)}}{R_0}$, $a_{0(R)}$ на $\frac{\hat{a}_{0(R)}}{R_0}$ соответственно. Что касается выражения для функции f_C , то нетрудно показать, что оно имеет вид

$$f_C(U) = \frac{1}{R_0} \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dU} \left[U \frac{b_{1(C)}(U \sin \theta)}{\omega} \right] + U b'_{0(C)}(U \sin \theta) \right\} d\theta, \quad (24)$$

или

$$f_C(u) = \frac{1}{R_0} \left[\frac{1}{2u} \frac{d}{du} \int_0^u \frac{U^2 \frac{\hat{b}_{1(C)}(U)}{\omega}}{\sqrt{u^2 - U^2}} dU + \frac{d}{du} \int_0^u \frac{U \hat{b}_{0(C)}(U)}{\sqrt{u^2 - U^2}} dU \right], \quad (25)$$

где $\hat{b}_{0(C)}$ — постоянная составляющая заряда на емкости. Вследствие дифференцирования второго члена правой части (23), $\hat{b}_{0(C)}$ не может быть определена при помощи измерения параметров выходного сигнала $U_{\text{вых}}(t)$. Поэтому будет уместным отметить, что при определении с помощью (24) и (25) характеристики f_C , не удовлетворяющей условию симметрии, в эксперименте должна быть предусмотрена возможность измерения постоянной составляющей заряда на емкости. В противном случае выражения (24) и (25) пригодны для определения либо симметричной характеристики f_C , либо ее нечетной части, когда она несимметрична.

Аналогичное затруднение возникает и тогда, когда рассматриваемым двухполюсником является последовательная эквивалентная RL -схема, характеристики нелинейных элементов которой подлежат определению. Регулируемый режим заданного тока осуществляется с помощью схемы, аналогичной рис. 1. Можно показать, что по результатам измерения квадратурной $\hat{b}_{1(L)}(I)$ составляющей первой гармоники и выходного напряжения цепи и постоянной составляющей потока $b_{0(L)}(I)$ в сердечнике катушки определяется нелинейная характеристика f_L .

при помощи выражений (24) и (25) с заменой в них $\frac{\hat{b}_{1(C)}}{\omega R_0}$ на $\frac{\hat{b}_{1(L)}}{\omega \omega}$.

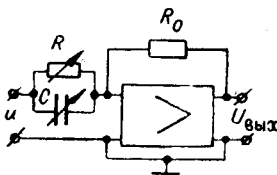


Рис. 2.

$\hat{b}_{0(C)}$ на $\hat{b}_{0(L)}$, U на I , u на i (ω — число витков катушки индуктивности). Далее, замена в соотношениях (13) и (21) $a_{1(R)}$ и $a_{0(R)}$ на синфазную составляющую $a_{1(L)}$ первой гармоники и постоянную составляющую $a_{0(L)}$ выходного сигнала рассматриваемой цепи позволяет определить функцию f_R .

В рамках изложенного выше способа отдельного определения характеристик элементов нелинейных двухполюсников рассмотрение параллельной эквивалентной RL -схемы не вносит ничего нового. В режиме заданного регулируемого напряжения (схема аналогична рис. 2 со входным напряжением $u = U \cos \Theta$) осуществляются измерения синфазной $\hat{a}_{1(R)}$ и квадратурной $\hat{b}_{1(L)}$ составляющих первой гармоники и постоянных составляющих $\hat{a}_{0(R)}$ и $\hat{b}_{0(L)}$, порождаемых каждым нелинейным элементом. Тогда искомые характеристики элементов R и L могут быть получены при помощи формул:

$$f_R(U) = -\frac{1}{R_0} \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dU} [U a_{1(R)}(U \cos \Theta)] + U a'_{0(R)}(U \cos \Theta) \right\} d\Theta; \quad (26)$$

$$f_L(\Phi) = \frac{1}{R_0} \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{d\Phi} [\Phi b_{1(L)}(\Phi \sin \Theta)] + \Phi b'_{0(L)}(\Phi \sin \Theta) \right\} d\Theta, \quad (27)$$

или

$$f_R(u) = \frac{1}{R_0} \left[\frac{1}{2u} \frac{d}{du} \int_0^u \frac{U^2 a_{1(R)}(U)}{\sqrt{u^2 - U^2}} dU + \frac{d}{du} \int_0^u \frac{U a_{0(R)}(U)}{\sqrt{u^2 - U^2}} dU \right]; \quad (28)$$

$$f_L(\Phi) = \frac{1}{R_0} \left[\frac{1}{2\Phi} \frac{d}{d\Phi} \int_0^\Phi \frac{\Phi^2 b_{1(L)}(\omega \Phi)}{\sqrt{\Phi^2 - \Phi^2}} d\Phi + \frac{d}{d\Phi} \int_0^\Phi \frac{\Phi b_{0(L)}(\omega \Phi)}{\sqrt{\Phi^2 - \Phi^2}} d\Phi \right], \quad (29)$$

где $\Phi = \frac{U}{\omega w}$ (w — число витков катушки).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Аксенов, Р. Д. Баглай. Применение метода интерполяционных квадратур для отдельного определения характеристик нелинейных элементов эквивалентных RC -схем.— *Автоматика*, 1968, № 6.
2. Г. А. Аксенов, Р. Д. Баглай. Особенности отдельного определения характеристик нелинейных элементов эквивалентной RL -схемы методом интерполяционных квадратур.— *Автоматика*, 1969, № 1.
3. L. A. Zadeh. On the Identification Problem.— *IRE Trans. on Circuit Theory*, 1956, CT-3, № 4.
4. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила в редакцию
9 июля 1968 г.