АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 4 1969

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АВТОМЕТРИИ

УДК 621.396.6.019

Б. И. КУРИЛИН
(*Киев*)

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДОПУСКОВ ЭЛЕМЕНТОВ ПО ЗАДАННЫМ ДОПУСКАМ ВЫХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Известно [1], что в процессе проектирования аппаратуры, и в частности контрольно-измерительных систем, возникают две основные задачи, связанные с расчетом допусков элементов, входящих в устройство: 1) задача анализа — определение вероятностных (или допустимых) значений выходных характеристик устройства по известным вероятностным (или допустимым) значениям параметров элементов; 2) задача синтеза — определение допусков параметров элементов по заданным допускам выходных характеристик устройства. Вторая задача представляет наибольший практический интерес, поскольку позволяет определять допустимые технологические отклонения параметров элементов по заданным допустимым отклонениям рабочих (выходных) характеристик устройства. Вторая задача включает в себя: а) определение многомерной области допусков, в которой сохраняется работоспособность проектируемого устройства; б) определение оптимальной точки в области допусков, в которой заданная целевая функция (например, функция стоимости) достигает экстремального значения (например, минимума).

В настоящей работе рассматривается ряд вопросов решения задачи 2а для случая, когда выходные характеристики устройства представляют собой произвольные непрерывные функции параметров элементов.

Постановка задачи. В настоящее время наибольшее распространение получили методы определения допусков, основанные на том, что степень влияния погрешности параметров элементов на погрешности выходных характеристик устройства описывается в виде линейной зависимости через коэффициенты влияния [1].

Однако эти методы применимы, когда отклонение параметров достаточно мало и характеристики устройства гладкие и достаточно близкие к линейным функции соответствующих параметров. Эти условия не всегда выполняются на практике, а при решении задачи синтеза нельзя заранее гарантировать малость отклонения параметров элементов. Более того, в задаче синтеза практический интерес представляют случаи, когда допустимы большие отклонения параметров элементов, ибо это существенно расширяет область работоспособности устройства и упрощает его изготовление.

Для устранения указанного недостатка в настоящей работе принята следующая постановка задачи.

Задана функциональная зависимость i-й выходной характеристики y_i устройства от n_i параметров x_j элементов устройства

$$y_i = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}); \; i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

где m — количество выходных характеристик устройства; n_i — количество параметров элементов, от которых зависит i-я характеристика, $n_i \leqslant n$; n — общее число параметров элементов устройства; $f_i(x)$ — непрерывные функции n_i переменных $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}\}$.

Задана область B допустимых значений $\bar{y}_i$ выходных характеристик, например, в форме неравенств:

$$b_i \leqslant \bar{y}_i \leqslant B_i. \tag{2}$$

В частности, $b_i = b_i^0 - \Delta b_i$; $B_i = b_i^0 + \Delta b_i$, где b_i^0 — оптимальное (номинальное) значение характеристики; Δb_i — допустимая погрешность. Физически пределы изменения параметров x_j ограничены и область H их возможных значений задана, например, в форме

$$h_j \leqslant x_j \leqslant H_j. \tag{3}$$

Требуется найти такую область $S \subseteq H$ допустимых значений $\bar{x}_j$ параметров элементов, чтобы выходные характеристики устройства лежали в заданной области B, т. е. должно выполняться условие

$$y_i \equiv \bar{y}_i \in B, \text{ если } x_j \equiv \bar{x}_j \in S \text{ для всех } j = \overline{1, n_i}. \tag{4}$$

Метод решения задачи. Условие (4) и соотношение (1) позволяют для определения допусков составить систему уравнений

$$f_i(x) - \bar{y}_i = 0; \; i = \overline{1, m}; \; \bar{y}_i = \in B, \tag{5}$$

которые принято [2] называть конечными уравнениями. Выбирая случайно или детерминированно для каждого $i = \overline{1, m}$ значение $\bar{y}_i \in B$, получаем систему (5). Число таких систем будет определяться количеством различных наборов величин $\{y_i\}_{1, m}$. Решение каждой системы определяет некоторую точку $\bar{x}_j \in S$ и может быть найдено методами, приведенными в [2] и [3]. В последней работе рассмотрен метод решения конечных уравнений (5) для случая $m \geqslant n$, что возможно на практике, например при расчете допусков параметров колебательной системы с распределенными параметрами волномера СВЧ. Кроме того, этот метод удобен и в тех случаях, когда для итерационных методов (простой итерации, Ньютона, Эйткена — Стефенсена и др.) нельзя заранее гарантировать сходимость (не исключено появление на k-й итерации особой матрицы Якоби) или когда вычисление производных нелинейных функций требует значительного машинного времени.

Объем расчетов можно сократить, если определять только границу σ_S области S. Для решения этой задачи можно, например, использовать эффективный метод дистерминации функции [4], понимая под дистерминантом D величину $\bar{y}_i \in \sigma_B$, где σ_B — граница области B. При этом можно показать, что граница σ_S определяется решениями задачи (5) при следующих условиях, налагаемых на значения $\bar{y}_i$:

$\bar{y}_1 \in [b_1, B_1]$, $\bar{y}_i = b_i$; $i = 2, 3, \ldots, m$;

$\bar{y}_2 \in [b_2, B_2]$, $\bar{y}_i = b_i$; $i = 1, 3, 4, \ldots, m$;

. . . .

$$
\begin{aligned}
&\bar{y}_k \in [b_k,\ B_k],\ \bar{y}_i = b_i;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,\ k+1,\ \ldots,\ m;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\bar{y}_m \in [b_m,\ B_m],\ \bar{y}_i = b_i;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1;\\
&\bar{y}_1 \in [b_1,\ B_1],\ \bar{y}_i = B_i;\ i = 2,\ 3,\ \ldots,\ m;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\bar{y}_k \in [b_k,\ B_k],\ \bar{y}_i = B_i;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,\ k+1,\ \ldots,\ m;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\bar{y}_m \in [b_m,\ B_m],\ \bar{y}_i = B_i;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Общее число M_0 систем уравнений (5), которые необходимо решить для определения σ_S, зависит от числа m уравнений в задаче (5) и числа узлов N_k, которыми разбивается интервал $[b_k,\ B_k]$ в (6). На основе (6) легко показать, что общее число систем равно $M = 2\left(\sum\limits_{k=1}^{m} N_k\right)$. Однако часть из этих систем уравнений повторяется в (6).

Действительно, если в первом условии (6) принять $\bar{y}_1 = b_1$, $\bar{y}_i = b_i$ $(i=2, 3,\ldots, m)$ и во втором условии $\bar{y}_2 = b_2$, $\bar{y}_i = b_i$ $(i = 1,\ 3,\ \ldots,\ m)$, то получим совпадающие условия. Число таких совпадений, как видно из (6), будет равно $2m$. Следовательно, искомое число M_0 определяется соотношением

$$
M_0 = 2\left(\sum_{k=1}^{m} N_k - m\right). \tag{7}
$$

Если число узлов для всех интервалов $[b_k,\ B_k]$, $k = \overline{1,\ m}$ одинаково, то

$$
M_0 = 2m(N-1). \tag{8}
$$

Методику решения задачи (5) удобно рассмотреть на примере.

Пример. В качестве примера рассмотрим задачу, которая возникает при определении области допустимых отклонений параметров лампы в генераторах и усилителях СВЧ с колебательными системами из отрезков фидерных линий, отклонений параметров смесительных и детекторных диодов в волномерах дециметровых волн, допустимой погрешности установки емкости в резонаторах из отрезков линий, перестраиваемых переменными конденсаторами, и при других приложениях.

Задан отрезок разомкнутой фидерной линии с нагрузкой в виде емкости с потерями; заданы номинальные значения резонансной частоты и резонансной проводимости и допустимые отклонения этих параметров. Требуется определить область допустимых отклонений емкости и тангенса угла потерь емкости.

На основе теории длинных линий [5] можно показать, что резонансная частота ω_0 и резонансная проводимость g_0 определяются следующими соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\omega_0 l}{v} + 0{,}5\ \mathrm{arctg}\ \frac{2\rho\,\omega_0 C}{1-(\rho\,\omega_0 C)^2\,(1+\mathrm{tg}^2\,\delta)} = \pi;\\
&g_0 = \frac{1}{\rho}\ \mathrm{th}\left[\alpha\, l + 0{,}5\ \mathrm{arth}\ \frac{2\rho\,\omega_0\, C\,\mathrm{tg}\,\delta}{1+(\rho\,\omega_0 C)^2\,(1+\mathrm{tg}^2\,\delta)}\right],
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где C — емкость нагрузки; $\mathrm{tg}\delta$ — тангенс угла потерь емкости; ρ, l, α — соответственно волновое сопротивление, длина и коэффициент затухания отрезка; v — скорость распространения.

Для получения более общих результатов, не зависящих от конкретных значений параметров отрезка, целесообразно ввести нормированные параметры:

$$G = g_0 \rho; \quad x_2 = \rho\, \omega_{\text{н}} C; \quad \eta = \frac{\omega_0}{\omega_{\text{н}}}, \tag{10}$$

где $\omega_{\text{н}}$ — резонансная частота ненагруженного отрезка, определяемая соотношением [5]

$$\omega_{\text{н}} = \frac{\pi v}{l}.$$

Пренебрегая изменением затухания α при изменении частоты в малых пределах ($\pm 10\%$) и вводя обозначения:

$$x_1 = tg\delta; \quad u = \alpha l,$$

из (9) после преобразований получим следующую систему уравнений:

$$\pi(\eta - 1) + 0{,}5 \operatorname{arctg} \frac{2x_2 \eta}{1 + (x_2 \eta)^2 \left(1 + x_1^2\right)} = 0;$$

$$G - \operatorname{th}\left(u + 0{,}5 \operatorname{arth} \frac{2x_1 x_2 \eta}{1 - (x_2 \eta)^2 \left(1 + x_1^2\right)}\right) = 0, \tag{11}$$

которая вместе с областью B допустимых отклонений η и G, заданной в виде

$$\eta_0 (1 - Д) \leqslant \bar{\eta} \leqslant \eta_0 (1 + Д); \quad G_0 (1 - c) \leqslant \bar{G} \leqslant G_0 (1 + c), \tag{12}$$

образует систему типа (5) для рассматриваемой задачи.

Численное решение задачи (11) — (12)* при $G_0 = 3{,}174984 \cdot 10^{-3}$, $u = 3{,}1415926 \cdot 10^{-3}$, $\eta_0 = 0{,}84555$, $x_{01} = 1 \cdot 10^{-3}$, $x_{02} = 0{,}2\pi$ для двух случаев (1) $Д = c = 10\%$, $N = 5$; 2) $Д = c = 5\%$, $N = 3$) выполнено на ЦВМ «Мир» методом, изложенным в [3]. Результаты решения, нормированные относительно номинальных значений x_{01} и x_{02}, приведены в табл. 1, 2 и представлены на рисунке.

Таблица 1

Относительные значения x_1

Д, %.	c, %				
	—10	—5	0	5	10
—10	—7,13243335	—3,14606854	0,83772772	4,81905789	8,7978112
—5	—7,57317072	—3,34047484	0,88949377	5,11684390	9,34145795
0	—8,51402336	—3,75547864	1	5,75253485	10,5019937
5	—10,45308864	—4,61078773	1,22774958	7,06267227	12,8938184
10	—15,17039256	—6,69155847	1,78181242	10,24993804	18,7125828

* Значение u соответствует добротности отрезка без нагрузки $Q = 250$ на частоте ω_0.

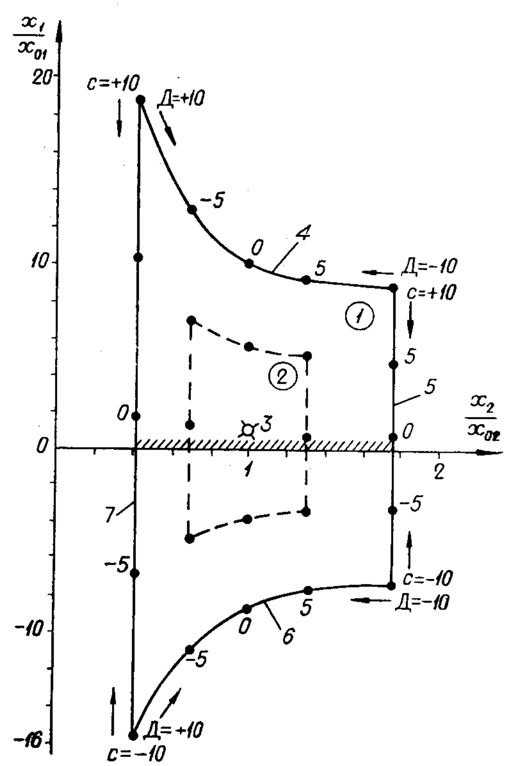
В табл. 2 приведены значения x_2/x_{02} только при $c=0$ с целью сокращения ее объема, поскольку другие значения x_2/x_{02} очень мало отличаются (в третьем-четвертом знаке) от приведенных. Физически это можно объяснить известным положением о малом влиянии потерь на резонансную частоту.

Таблица 2

Относительные значения x_2 при $c=0$

Д, %	−10	−5	0	5	10
$\frac{x_2}{x_{02}}$	1,7698916	1,34838096	1	0,6974725	0,4232812

Следует отметить, что полученные результаты мало отличаются (менее 7%) от результатов, найденных при решении системы (11) с учетом (12) методом исключения, если пренебречь в первом уравнении величиной x_1^2 по сравнению с 1. Попытка решения системы (11) на основе стандартной программы ЦВМ «Мир», реализующей метод простой итерации, не увенчалась успехом, поскольку, как позже выяснилось, для данной системы уравнений не выполняются необходимые условия сходимости процесса вычисления для физически интересной области S.



Область *1*, соответствующая допустимым отклонениям Д$=c=10\%$ (см. рисунок), ограничивается кривыми *4*—*7*. Кривая *4* определена решением системы (11) при выполнении первого из условий (6), которое с учетом (12) и при разбиении в (12) интервала изменения η 5 узлами ($N=5$) имеет вид

$$Д(\%)=-10,\ -5,\ 0,\ 5,\ 10;\quad c(\%)=10. \tag{13}$$

Аналогично кривые *5*—*7* определяются соответственно из условий (%):

$$c=-10,\ -5,\ 0,\ 5,\ 10;\ Д=-10;\ Д=-10,\ -5,\ 0,\ 5,\ 10;\ c=-10;\ c=-10,\ -5,\ 0,\ 5,\ 10;\ Д=+10. \tag{14}$$

Область *2* ограничивает допустимые относительные отклонения x_1 и x_2 при $c=Д=5\%$. Точка *3* соответствует номинальному значению параметров η_0 и G_0 ($c=Д=0$). Стрелки указывают направление, по которому изменяются соответствующие величины.

Число систем, решаемых для определения границ областей *1* и *2*, находится из (8) и соответственно равно 16 и 8.

Для пассивной колебательной системы физический смысл имеют лишь части областей *1* и *2*, лежащие выше оси абсцисс. В этом случае условие (3) имеет вид $x_1/x_{01}>0$, $x_2/x_{02}>0$.

В заключение следует отметить, что полученная область допусков не является выпуклой (выпуклость области нарушается на кривых *4* и *6*). Однако эту особенность данной области невозможно выявить, если определять ее, как обычно принято [1], через коэффициенты влияния, ибо в основе подобных методов [1] лежит линеаризация характеристик и поэтому кривые *4* и *6* будут линейными функциями отношения x_2/x_{02}.

Следовательно, в отличие от известных методов, основанных на линеаризации характеристик через коэффициенты влияния, предлагаемый метод нахождения области допусков позволяет выявить особенности искомой области и в тех случаях, когда характеристики устройства являются существенно нелинейными функциями элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Карпюк, В. В. Малинин. Определение погрешностей выходных характеристик и допусков параметров элементов измерительных систем.— Автометрия, 1967, № 1, 3.
2. Г. Е. Пухов. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. Киев, «Наукова думка», 1967.
3. В. М. Волков, Б. И. Курилин. К решению некоторых прикладных задач оптимизации сложных радиоэлектронных систем.— Труды семинара «Математическое моделирование и теория электрических цепей», вып. 4. Киев, АН УССР, 1967.
4. М. С. Абрамович. Об одном принципе построения схем дистерминации (оценки значения) функции нескольких переменных.— Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 2.
5. А. М. Заездный. Основы расчетов радиотехнических цепей. М., «Связь», 1966.

Поступила в редакцию
29 марта 1968 г.,
окончательный вариант —
20 июля 1968 г.