

В. А. ВИТТИХ
(Новосибирск)

АДАПТИВНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ВВЕДЕНИЕ

В результате обработки измерительной информации по алгоритмам адаптивной дискретизации лежандровского типа первого порядка сигнал разбивается на ряд соприкасающихся отрезков, на каждом из которых он приближается прямой линией [1, 2]. Полученная таким образом линейно-ломаная на границе двух смежных интервалов претерпевает разрыв, что затрудняет операцию восстановления сигнала. Алгоритм управления сбором информации [3] свободен от этого недостатка, поскольку вместо регистрации коэффициентов разложения производится выборка отсчетов сигнала (как правило, искаженных помехой). Очевидно, что в этом случае не используется ценное качество алгоритмов лежандровского типа, заключающееся в том, что приближающая функция представляет собой результат сглаживания входного сигнала.

В работе предлагается алгоритм адаптивной дискретизации, объединяющий достоинства указанных алгоритмов. Как и в алгоритме адаптивной выборки [3], на отрезке аппроксимации предусматривается регистрация одного отсчета сигнала. Но этот отсчет вычисляется на основе обработки исходных данных по методу наименьших квадратов. В отличие от алгоритмов, изложенных в [1—3], оценки ошибок приближения вычисляются также по методу наименьших квадратов, что значительно повышает помехоустойчивость [4] и коэффициент сжатия.

МОДЕЛЬ СИГНАЛА

Сигнал на отрезке $[0, T]$ представляется в виде

$$x(t) = s(t) + \xi(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — помеха, представляющая собой стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\lambda|\tau|}$; $s(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i$ — полезный сигнал.

Максимальную степень аппроксимирующего полинома n примем равной единице, т. е. сигнал на выбранном отрезке будет аппроксимироваться прямой.

Введем еще одно важное практическое ограничение, а именно предположим, что на выбранном отрезке аппроксимации полезный сигнал представляет собой полином второй степени. Это ограничение обусловлено двумя факторами.

Во-первых, характером измерительных сигналов, встречающихся в реальных системах. Обычно сигналы, характеризующие состояние технических объектов, представляют собой достаточно гладкие функции; во всяком случае на отрезках конечной длительности спектр коэффициентов достаточно быстро убывает. Иными словами, можно записать, что $a_2 > a_3 > a_4 \dots$.

Во-вторых, соответствующим выбором длины отрезка. Последнее обстоятельство поясним несколько подробнее.

При малых T (а процедура адаптивной дискретизации начинается при величинах T , близких к нулю) погрешность можно оценивать первым отброшенным членом ряда $a_3 t^3$. При дальнейшем увеличении отрезка необходим учет $a_3 t^3$ и т. д. Увеличение T происходит до тех пор, пока максимальная погрешность не станет равной допустимой ϵ_0 . В этот момент фиксируются параметры прямой, а интервал считается выбранным. Поскольку величина ϵ_0 обычно задается достаточно малой (0,5—2% от максимального значения сигнала), а также учитывая, что $a_2 > a_3$, можно предположить, что уже один отброшенный член ряда сравняется с допустимой погрешностью, в то время как $a_3 t^3$ будет пренебрежимо мал по сравнению с ϵ_0 .

Приведенные соображения позволяют нам считать, что на выбранном отрезке аппроксимации полезный сигнал представляет собой полином второй степени. Таким образом,

$$x(t) = \sum_{i=0}^2 a_i t^i + \xi(t); \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Найдем максимальное значение погрешности приближения сигнала $s(t) = \sum_{i=0}^2 a_i t^i$ прямой, проходящей через точки $s(0)$ и $s(T)$. Уравнение этой прямой имеет вид

$$y(t) = a_0 + (a_1 + a_2 T) t; \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Рассмотрим три случая.

I. Критерий равномерного приближения: $\epsilon_m = \max_{0 \leq t \leq T} |s(t) - y(t)|$. В этом случае

$$\epsilon_m = \frac{|a_2| T^2}{4}. \quad (3)$$

II. Интегральный критерий:

$$E = \frac{1}{T} \int_0^T [s(t) - y(t)] dt = \frac{|a_2| T^2}{6}. \quad (4)$$

III. Среднеквадратический критерий:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [s(t) - y(t)]^2 dt} = \frac{|a_2| T^2}{\sqrt{30}} \approx \frac{|a_2| T^2}{5,5}. \quad (5)$$

Соотношения (3)—(5) позволяют оценить «жесткость» различных критериев близости. При прочих равных условиях наибольшее значение погрешности будет в том случае, если используется равномерный критерий приближения. Соответственно, число отрезков аппроксимации будет больше, а коэффициент сжатия меньше, чем при использовании интегрального и среднеквадратического критериев.

Сравним теперь ошибку приближения $s(t)$ прямой $y(t)$ с погрешностью аппроксимации сигнала $s(t)$ прямой $z(t) = b_0 + b_1 t$, построенной по методу наименьших квадратов. Оценки наименьших квадратов коэффициентов b_0 и b_1 приведены в [5]. Проведя необходимые преобразования, получим: $b_0 = a_0 - \frac{1}{6} a_2 T^2$; $b_1 = a_1 + a_2 T$.

Модуль — максимум погрешности $\varepsilon'(t) = s(t) - z(t)$ — будет в точках $t=0$ и $t=T$ и равен

$$\varepsilon'_m = \frac{|a_2| T^2}{6}. \quad (6)$$

Выбор отрезка производится по условию $\varepsilon_0 = \varepsilon_m$, т. е. $\varepsilon_0 = \frac{|a_2| T_1^2}{6}$.

Отсюда

$$T_1 = \sqrt{\frac{6\varepsilon_0}{|a_2|}}.$$

Если приближать $s(t)$ прямой $y(t)$, то, как следует из (3), соответствующая длина отрезка будет оцениваться величиной

$$T_2 = \sqrt{\frac{4\varepsilon_0}{|a_2|}}.$$

Таким образом, величина T_1 будет в $\sqrt{1,5}$ раз больше T_2 . Однако при аппроксимации прямой $y(t)$ регистрируется только один отсчет $s(T) = y(T)$, поскольку значение a_0 нам известно и представляет собой отсчет сигнала на предыдущем отрезке аппроксимации. Прямая $z(t)$ задается коэффициентами b_0 и b_1 , так что на каждом отрезке фиксируются два параметра. Поэтому можно предположить, что, используя алгоритм с фиксацией отсчетов сигнала, мы получим выигрыш в коэффициенте сжатия в среднем в $\frac{2}{\sqrt{1,5}} \sim 1,6$ раза по сравнению с алгоритмом,

основанным на аппроксимации прямой $z(t)$ (эта оценка справедлива в том случае, если не учитывать служебной информации).

ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ, $s(T)$ И ε_m

Когда сигнал $s(t)$ искажен случайной помехой, точное определение коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 невозможно. Если помеха слабокоррелирована, то хорошие результаты дают оценки коэффициентов по методу наименьших квадратов. Причем в тех случаях, когда $K(\tau) = \delta(\tau)$, эти оценки являются несмещенными и эффективными.

Подставив значения a_1^* и a_2^* , полученные методом наименьших квадратов [5], в выражение для $s(T)$, получим оценку

$$s^*(T) = a_0^* - \frac{6}{T} \int_0^T x(t) dt + \frac{12}{T^2} \int_0^T t x(t) dt. \quad (7)$$

Погрешность будем оценивать по равномерному критерию приближения. В результате подстановки a_2^* в выражение (3) получим оценку погрешности

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^* &= \frac{15}{2T} \int_0^T x(t) dt - \frac{45}{T^2} \int_0^T t x(t) dt + \frac{45}{T^3} \times \\ &\times \int_0^T t^2 x(t) dt = a_0^* - \frac{3}{2T} \int_0^T x(t) dt - \frac{9}{T^2} \times \\ &\times \int_0^T t x(t) dt + \frac{15}{T^3} \int_0^T t^2 x(t) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

АЛГОРИТМ

Вычисление $s^*(T)$ и погрешности $\varepsilon_m^*(T)$ по формулам (7) и (8) начинается с некоторого минимального интервала $[0, T_{\min}]$ (на выборе величины T_{\min} мы остановимся позднее). Отрезок постепенно увеличивается, а текущее значение ошибки $\varepsilon_m^*(T)$ сравнивается с допустимой погрешностью ε_0 . [Заметим, что в качестве a_0^* вначале используется значение $x(0)$]. В момент T_1 , когда $\varepsilon_m^*(T_1)$ сравнивается с ε_0 , производится регистрация отсчета $s^*(T_1)$. Для следующего отрезка T_1 принимается за начало координат, а $s^*(T_1)$ — равным a_0^* , и процедура повторяется.

ВЕРОЯТНОСТЬ ПРЕВЫШЕНИЯ ДОПУСТИМОЙ ОШИБКИ

При испытаниях устройств адаптивной дискретизации производится оценка их точности. Процедура вычисления погрешности сводится к сравнению исходного сигнала с сигналом, восстановленным по выбранным отсчетам. Часто получатель информации выдвигает требование, чтобы ни в одной точке отрезка аппроксимации разность между входным и выходным сигналами не превышала допустимой погрешности. Это требование нельзя признать обоснованным, поскольку по своему смыслу задача фильтрации случайных помех связана с понятием вероятности. Поэтому необходимо допустить некоторую вероятность превышения заданной ошибки приближения; причем величина этой вероятности должна определяться характеристиками помех, искажающих полезный сигнал. Оценим вероятность превышения допустимой ошибки при следующих ограничениях:

1. Помеха распределена по равномерному закону с плотностью распределения $w_{\xi} = \frac{1}{2k\varepsilon_0}$; $0 < k \leq 1$.

2. Приближающая прямая $y(t)$ проходит через точки $s(0)$ и $s(T)$; причем ее коэффициенты известны точно.

3. В выражении для $s(t) = \sum_{i=0}^2 a_i t^i$ коэффициент $a_2 < 0$.

Запишем выражение для ошибки приближения сигнала прямой $y(t) = a_0 + (a_1 + a_2 T)t$:

$$\varepsilon(t) = s(t) - y(t) = a_2(t^2 - tT). \quad (9)$$

Теперь сигнал $x(t)$ представляется в виде $x(t) = y(t) + \varepsilon(t) + \xi(t)$. Погрешность приближения $x(t)$ функцией $y(t)$, восстановленной по $s(0)$ и $s(T)$, оценивается величиной

$$\Delta(t) = \varepsilon(t) + \xi(t).$$

Величина вероятности превышения допустимой ошибки $P_t(|\Delta| > \varepsilon_0)$ в точке $t \in [0, T]$ будет равна

$$P_t(|\Delta| > \varepsilon_0) = (\varepsilon(t) + k\varepsilon_0 - \varepsilon_0) \frac{1}{2k\varepsilon_0}.$$

Очевидно, что при значениях t , меньших некоторого t_0 , вероятность $P_t(|\Delta| > \varepsilon_0)$ будет равна нулю. Величину t_0 определим из уравнений: $\varepsilon(t_0) + k\varepsilon_0 = \varepsilon_0$, $a_2 t_0^2 - a_2 T t_0 + \varepsilon_0(k-1) = 0$.

Решив эти уравнения, получим $t_{0,1,2} = \frac{T}{2} (1 \mp \sqrt{k})$.

Вычислим среднюю вероятность $P(|\Delta| > \varepsilon_0)$ превышения допустимой погрешности для отрезка $[0, T/2]$:

$$P(|\Delta| > \varepsilon_0) = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} P_t(|\Delta| > \varepsilon_0) dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{t_0} P_t(|\Delta| > \varepsilon_0) dt + \int_{t_0}^{T/2} P_t(|\Delta| > \varepsilon_0) dt \right] = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T/2} [a_2(t^2 - tT) + \varepsilon_0(k-1)] dt. \quad (10)$$

Из (3) определим

$$a_2 = -\frac{4\varepsilon_0}{T^2}. \quad (11)$$

Подставив (11) в (10) и проведя интегрирование, получим

$$P(|\Delta| > \varepsilon_0) = \frac{\sqrt{k}}{3} \quad (0 < k \leq 1). \quad (12)$$

Средняя вероятность на отрезке $[\frac{T}{2}, T]$ очевидно также будет равна $\frac{\sqrt{k}}{3}$, поскольку функция $\varepsilon(t) = a_2(t^2 - Tt)$ симметрична относительно середины отрезка. Учитывая, что $k\varepsilon_0 = \sigma^2 \sqrt{3}$, где σ — среднеквадратическое отклонение помехи, (12) перепишем в виде

$$P(|\Delta| > \varepsilon_0) = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}.$$

Введем обозначение $\gamma = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Тогда

$$P(|\Delta| > \epsilon_0) = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3} \sqrt{\gamma} \left(0 < \gamma \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \right). \quad (13)$$

Пример. Пусть весь диапазон изменения сигнала $[0, x_{\max}]$ разбит на 256 уровней квантования. Абсолютная ошибка квантования будет равна

$$\delta = \frac{1}{256} x_{\max}.$$

Как известно [6], при малых δ эта погрешность распределена по равномерному закону в диапазоне $[x_k, x_{k+1}]$ и имеет среднеквадратическое

$$\gamma = \frac{1}{16^2 \cdot 2\sqrt{3}}.$$

По формуле (13) подсчитаем вероятность превышения допустимой ошибки

$$P(|\Delta| > \epsilon_0) = \frac{5}{24} \sim 0,2.$$

Таким образом, при наличии относительно «слабых» шумов квантования вероятность превышения допустимой ошибки может иметь значительную величину.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСПЕРСИИ ПОГРЕШНОСТИ И ОТСЧЕТОВ СИГНАЛА

Подставив в выражение $s^*(T) = a_0^* + a_1^* T + a_2^* T^2$ значения a_0^* , a_1^* и a_2^* [5], получим

$$s^*(T) = \frac{3}{T} \int_0^T x(t) dt - \frac{24}{T^2} \int_0^T tx(t) dt + \frac{30}{T^3} \int_0^T t^2 x(t) dt. \quad (14)$$

Учитывая, что $x(t) = s(t) + \xi(t)$, (14) перепишем в виде

$$s^*(T) = s(T) + \frac{3}{T} \int_0^T \xi(t) dt - \frac{24}{T^2} \int_0^T t \xi(t) dt + \frac{30}{T^3} \int_0^T t^2 \xi(t) dt.$$

Введем обозначения:

$$\psi_T = \int_0^T \xi(t) dt; \quad \varphi_T = \int_0^T t \xi(t) dt; \quad \theta_T = \int_0^T t^2 \xi(t) dt.$$

Тогда

$$[s^*(T) - s(T)]^2 = \left[\left(\frac{3}{T} \psi_T - \frac{24}{T^2} \varphi_T \right) + \frac{30}{T^3} \theta_T \right]^2 =$$

$$= \frac{9}{T^2} \psi_T^2 - \frac{144}{T^3} \psi_T \varphi_T + \frac{576}{T^4} \varphi_T^2 + \frac{180}{T^4} \psi_T \Theta_T - \frac{1440}{T^5} \varphi_T \Theta_T + \frac{900}{T^6} \Theta_T^2.$$

Дисперсия $s^*(T)$ определяется выражением

$$D_s(T) = \frac{9}{T^2} D_\psi(T) - \frac{144}{T^3} K_{\psi\varphi}(T, T) + \frac{576}{T^4} D_\varphi(T) + \\ + \frac{180}{T^4} K_{\psi\Theta}(T, T) - \frac{1440}{T^5} K_{\varphi\Theta}(T, T) + \frac{900}{T^6} D_\Theta(T), \quad (15)$$

где

$$D_\psi(T) = \int_0^T dt' \int_0^T K_\xi(t', t'') dt'', \quad (16)$$

$K_\xi(t', t'')$ — корреляционная функция помехи;

$$K_{\psi\Theta}(T, T) = M \left[\int_0^T \xi(t') dt' \int_0^T t'' \xi(t'') dt'' \right] = \\ = \int_0^T \int_0^T M [\xi(t') \xi(t'') t''] dt'' dt' = \int_0^T dt' \int_0^T t'' K_\xi(t', t'') dt''. \quad (17)$$

Используя аналогичную процедуру, получим выражения для $D_\varphi(T)$, $K_{\psi\Theta}(T, T)$, $K_{\varphi\Theta}(T, T)$ и $D_\Theta(T)$:

$$D_\varphi(T) = \int_0^T t' dt' \int_0^T t'' K_\xi(t', t'') dt''; \quad (18)$$

$$K_{\psi\Theta}(T, T) = \int_0^T dt' \int_0^T t''^2 K_\xi(t', t'') dt''; \quad (19)$$

$$K_{\varphi\Theta}(T, T) = \int_0^T t' dt' \int_0^T t''^2 K_\xi(t', t'') dt''; \quad (20)$$

$$D_\Theta(T) = \int_0^T t'^2 dt' \int_0^T t''^2 K_\xi(t', t'') dt''. \quad (21)$$

Максимальное значение ошибки приближения по равномерному критерию приближения будет равно

$$\epsilon_m^* = \frac{a_2^* T^2}{4} = \frac{15}{2T} \int_0^T x(t) dt - \frac{45}{T^2} \int_0^T t x(t) dt + \frac{45}{T^3} \int_0^T t^2 x(t) dt.$$

После преобразований, подобных тем, которые сделаны для нахождения дисперсии $D_s(T)$, получим

$$D_s(T) = 225 \left(\frac{1}{4T^2} D_\psi(T) - \frac{3}{T^3} K_{\psi\varphi}(T, T) + \frac{9}{T^4} (D_\varphi(T) + \right. \\ \left. + \frac{3}{T^4} K_{\psi\Theta}(T, T) - \frac{18}{T^5} K_{\varphi\Theta}(T, T) + \frac{9}{T^6} D_\Theta(T) \right). \quad (22)$$

Пусть корреляционная функция помехи имеет вид

$$K_\xi(t'' - t') = \sigma^2 e^{-\lambda |t'' - t'|}. \quad (23)$$

Подставим выражение для $K_{\xi}(t'' - t')$ в (16)–(21) и проведем интегрирование. Затем после подстановки результатов интегрирования в (15) и (22) получим:

$$D_{\varepsilon}(\lambda T) = D(\alpha) = 22,5\sigma^2 \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{5}{\alpha^2} + \frac{60}{\alpha^4} + 5e^{-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{60}{\alpha^3} - \frac{84}{\alpha^4} + \frac{144}{\alpha^6} \right) \right]; \quad (24)$$

$$D_s(\lambda T) = 18\sigma^2 \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{5}{\alpha^2} + \frac{20}{3\alpha^3} + \frac{24}{\alpha^4} + 3e^{-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{124}{3\alpha^3} - \frac{48}{\alpha^4} + \frac{80}{3\alpha^5} + \frac{400}{3\alpha^6} \right) \right], \quad (25)$$

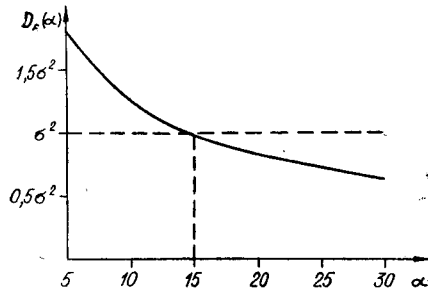
где $\alpha = \lambda T$.

Исследуем поведение функции $D_{\varepsilon}(\lambda T)$. При малых значениях α величина дисперсии $D_{\varepsilon}(\alpha)$ во много раз превышает дисперсию помехи σ^2 . В этом случае наблюдается фактически не сглаживание, а усиление помех. Например, при $\alpha=1$ величина $D_{\varepsilon}(\alpha)$ в 1000 раз превосходит σ^2 . Поэтому процесс адаптивной дискретизации нужно начинать с некоторого минимального отрезка $[0, T_{\min}]$, величина которого выбрана из следующих соображений. Величина T_{\min} должна быть такой, чтобы вероятность $P(\varepsilon_m^* > \varepsilon_0)$, вычисленная для этого отрезка, не превышала некоторой достаточно малой величины. Иными словами, мы хотим исключить «ложное» нарушение условия $\varepsilon_0 > \varepsilon_m^*$, обусловленное влиянием помех. Пусть $\xi(t)$ представляет собой гауссовский случайный процесс с нулевым средним. Поскольку ε_m^* представляет собой линейный функционал от $\xi(t)$, то погрешность также будет распределена по нормальному закону [7]. Тогда вероятность превышения допустимой ошибки может быть найдена из следующей формулы:

$$\begin{aligned} P(\varepsilon_m^* > \varepsilon_0) &= 1 - P(-\varepsilon_0 < \varepsilon_m^* < \varepsilon_0) = \\ &= 1 - 2P(0 < \varepsilon_m^* < \varepsilon_0) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon_0}{\sigma_{\varepsilon} \sqrt{2}}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Приведем еще одно соображение, касающееся выбора T_{\min} . Величину T_{\min} целесообразно выбирать не меньше интервала корреляции помехи τ_0 , который определяется из условия

$$\begin{aligned} \sigma^2 e^{-\lambda|\tau_0|} &= \\ &= 0,01 \sigma^2, \text{ т. е. } \tau_0 \approx \frac{4,6}{\lambda}. \end{aligned}$$



Если $T < \tau_0$, то величина дисперсии ошибки значительно превышает дисперсию помехи. На рисунке приведена зависимость дисперсии погрешности приближения от $\alpha = \lambda T$ (при $\alpha > 5$). При $5 < \alpha < 15$ величина $D_{\varepsilon}(\alpha)$

превышает дисперсию помехи, а при $\alpha > 15$ наблюдается эффект сглаживания ($\sigma^2 > D_{\varepsilon}$).

Характер изменения дисперсии отсчетов $D_{\varepsilon}(\alpha)$ совпадает с $D_{\varepsilon}(\alpha)$ (при $\alpha > 5$). Это ясно из сопоставления выражений (24) и (25).

При $\alpha > 10$ кривые практически представляют собой гиперболы, поскольку все остальные члены в формулах (21) и (25) становятся величинами второго (и более высокого) порядка малости.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

При моделировании алгоритма на цифровых вычислительных машинах необходимо вычислять интегралы:

$$I_0 = \int_0^T x(t) dt; \quad I_1 = \int_0^T tx(t) dt; \quad I_2 = \int_0^T t^2 x(t) dt.$$

Выберем шаг интегрирования Δt из условия, чтобы функция $x(t)$ изменялась на нем практически по линейному закону. Причем, не умаляя общности рассуждений, примем $\Delta t = 1$. Для k -го отрезка уравнение прямой запишем в виде

$$y_k(t) = (x_{k+1} - x_k)(t - k) + x_k; \quad k \leq t \leq k + 1.$$

Тогда

$$I_0(N-1) = \sum_{k=0}^{N-2} \int_k^{k+1} y_k(t) dt = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{x_{k+1} + x_k}{2},$$

где N — число отсчетов на отрезке $[0, T]$. Очевидно, что $T = N - 1$. Тогда

$$I_1(N-1) = \sum_{k=0}^{N-2} \int_k^{k+1} t y_k(t) dt = \sum_{k=0}^{N-2} \left\{ \frac{x_{k+1} - x_k}{3} [(k+1)^3 - k^3] - \frac{x_{k+1} - x_k}{2} k(2k+1) + \frac{x_k}{2} (2k+1) \right\};$$

$$I_2(N-1) = \sum_{k=0}^{N-2} \int_k^{k+1} t^2 y_k(t) dt = \sum_{k=0}^{N-2} \left\{ \frac{x_{k+1} - x_k}{4} [(k+1)^4 - k^4] - \frac{k(x_{k+1} - x_k)}{3} [(k+1)^3 - k^3] + \frac{x_k}{3} [(k+1)^3 - k^3] \right\}.$$

Теперь формулы (7) и (8) можно переписать в численном виде:

$$s_{j+1}^*(N-1) = s_j^* - \frac{6}{N-1} I_0(N-1) + \frac{12}{(N-1)^2} I_1(N-1);$$

$$\varepsilon_m^*(N-1) = s_j^* - \frac{3}{2(N-1)} I_0(N-1) - \frac{9}{(N-1)^2} I_1(N-1) + \frac{15}{(N-1)^3} I_2(N-1);$$

где $s_0^* = x(0)$; $N=2, 3, \dots$

Полученные формулы можно использовать при составлении программы для ЦВМ, а также при проектировании цифрового вычислителя, реализующего изложенный алгоритм. Для вычисления $s_{j+1}^*(N-1)$ и $\varepsilon_m^*(N-1)$ необходимо запоминать значения $x(N-2)$, $I_0(N-2)$, $I_1(N-2)$, $I_2(N-2)$ и s_j^* , рассчитанные на предыдущем шаге. Таким

образом, объем используемой оперативной памяти будет невелик. Логика также проста [необходимо проверять условие $\varepsilon_0 > \varepsilon_m^* (N - 1)$]. Основной «вес» в алгоритме занимают арифметические операции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен алгоритм адаптивной выборки отсчетов, в основу которого положен метод наименьших квадратов. В отличие от других подобных алгоритмов в данном алгоритме предусматривается регистрация сглаженных отсчетов сигнала.

Получена оценка погрешности приближения и вычислена ее дисперсия. Показано, что на малых отрезках аппроксимации дисперсия оценки может во много раз превосходить дисперсию помехи, искажающей полезный сигнал. Даны рекомендации по выбору минимального отрезка аппроксимации, с которого следует начинать процедуру адаптивной дискретизации. При увеличении длины интервала дисперсия ошибки уменьшается по гиперболическому закону.

Расчитана вероятность превышения допустимой погрешности за счет действия случайной помехи, распределенной по равномерному закону. Показано, что величина этой вероятности зависит от отношения среднеквадратичного значения помехи к допустимой погрешности.

Приведены формулы численного интегрирования, позволяющие моделировать алгоритм на цифровых вычислительных машинах.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Виттих. Исследование помехоустойчивости некоторых типов адаптивных дискретизаторов измерительных сигналов.— *Автометрия*, 1965, № 6.
2. В. А. Виттих, А. Н. Гинзбург. Алгоритмы адаптивной дискретизации лемандровского типа.— *Кибернетические пути совершенствования измерительной аппаратуры (Труды V научно-технической конференции)*. Л., 1968.
3. В. А. Виттих, А. Н. Гинзбург. Об одном алгоритме управления сбором информации.— *Автометрия*, 1965, № 4.
4. В. А. Виттих, А. Н. Гинзбург. Оценка помехоустойчивости адаптивных дискретизаторов измерительных сигналов.— *Автометрия*, 1967, № 4.
5. Э. Хеннан. Анализ временных рядов. М., «Наука», 1964.
6. Б. Р. Левин. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М., «Советское радио», 1960.
7. Д. Миддлтон. Введение в статистическую теорию связи, т. I. М., «Советское радио», 1961.

*Поступила в редакцию
28 августа 1968 г.*