А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1969

УДК 621.3.088+681.142.621

Г. И. САЛОВ

(Новосибирск)

ОБ ОЦЕНКЕ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ МНОЖЕСТВОМ РЕЛЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СО СЛУЧАЙНЫМ ПОРОГОМ СРАБАТЫВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ МЕШАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ, ч. 2

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей части работы [1] начато рассмотрение точечной оценки измеряемой величины α, получаемой экспериментом с применением множества релейных элементов (метод совпадения) в реальной ситуации, где пороги срабатывания элементов являются случайными величинами, зависимыми от мешающего воздействия. Множество состоит из двух частей (подмножеств), каждой из которых соответствует своя функция распределения порогов срабатывания — одна и та же для всех ее элементов и изменяющаяся вместе с (неизвестным) мешающим параметром β. Оценка α^* измеряемой величины α является функцией от числа сработавших элементов в каждом подмножестве и определяется названными двумя распределениями. При этом в работе [1] автор ограничился самым простым примером и совсем не коснулся условий на произвольные допущения о распределениях, при которых увеличение числа элементов множества приводит к повышению точности оценки.

В данной части работы устанавливаются такие достаточные условия. Приводится более или менее простой путь выполнения их и связанный с ним пример специальных распределений порогов срабатывания, но могущих быть, как интуитивно чувствуется, не столь редкими на практике.

УСЛОВИЯ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Этот пункт будет посвящен доказательству утверждения, показывающего, при каких условиях оценка максимального правдоподобия является наилучшей в асимптотическом смысле для большого числа элементов множества. Найденное при этом асимптотическое распределение оценки α^* оказывается полезным приближением. Упомянутое утверждение состоит в следующем.

Если изготовление множества элементов таково, что:

1) пороги срабатывания элементов являются независимыми случайными величинами с одной и той же функцией распределения $G_1(x, \beta)$ $[G_2(x, \beta)]$ *для первого (второго) подмножества,*

2) для всякой возможной пары значений α *и* β *функции* $G_1(x, \beta)$ *и* $G_2(x, \beta)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в некоторой окрестности точки* (α, β) *и*

3) в этой точке

$$G'_{1x}(x, \beta)\, G'_{2\beta}(x, \beta) - G'_{1\beta}(x, \beta)\, G'_{2x}(x, \beta) \neq 0,$$

то оценки максимального правдоподобия α^* *и* β^* *истинных значений* α *и* β *являются состоятельными (при безграничном увеличении числа элементов* n *в каждом подмножестве сходятся по вероятности* [2, 3] *к истинному значению соответственно* α *и* β*), асимптотически нормальными и совместно эффективными (наилучшими), причем дисперсия* α^* *для больших* n *равна*

$$\frac{G_1(\alpha_0, \beta_0)\,[1 - G_1(\alpha_0, \beta_0)]\,\left[G'_{2\beta}(\alpha_0, \beta_0)\right]^2 + G_2(\alpha_0, \beta_0)\,[1 - G_2(\alpha_0, \beta_0)]\,\left[G'_{1\beta}(\alpha_0, \beta_0)\right]^2}{n\left[G'_{1x}(\alpha_0, \beta_0)\, G'_{2\beta}(\alpha_0, \beta_0) - G'_{1\beta}(\alpha_0, \beta_0)\, G'_{2x}(\alpha_0, \beta_0)\right]^2}$$

где через $\alpha_0(\beta_0)$ *обозначено неизвестное истинное значение* $\alpha(\beta)$.

Доказательство. Оценки максимального правдоподобия α^* и β^* получаются при решении относительно α и β системы уравнений [1]

$$G_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{n}\eta_1, \quad G_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{n}\eta_2, \tag{1}$$

где η_i — число сработавших элементов в подмножестве i. *Сначала покажем, что система (1) имеет решение* (α^*, β^*), *сходящееся по вероятности при* $n \to \infty$ *к* (α_0, β_0).

Из условия 1) утверждения следует [1], что η_i подчиняется биномиальному распределению с параметром $G_i(\alpha_0, \beta_0)$. По теореме Бернулли [2, 3] $^1/_n\,\eta_i$ при $n \to \infty$ сходится по вероятности к $G_i(\alpha_0, \beta_0)$. Если в (1) η_1/n и η_2/n заменить соответственно на $G_1(\alpha_0, \beta_0)$ и $G_2(\alpha_0, \beta_0)$, то пара $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ будет удовлетворять системе (1). Применяя теорему о неявных функциях (см., например, [4]), получаем, что в некоторой окрестности W точек $(G_1(\alpha_0, \beta_0), G_2(\alpha_0, \beta_0))$ система уравнений (1) определяет α^* и β^* как единственную пару функций от η_1/n и η_2/n, причем эти функции непрерывны в W. Следовательно, согласно теореме Слуцкого [5], $\alpha^*(\beta^*)$ сходится по вероятности к $\alpha_0(\beta_0)$. Состоятельность оценок доказана.

Найдем теперь асимптотическое распределение α^* *и* β^* *для больших* n. Разложение Тейлора $G_1(x, \beta)$ и $G_2(x, \beta)$ в точке (α_0, β_0) и подстановка α^* и β^* в (1) дают новую систему уравнений

$$(\alpha^* - \alpha_0)\, A_{11} + (\beta^* - \beta_0)\, A_{12} = \frac{1}{n}\eta_1 - G_1(\alpha_0, \beta_0);$$

$$(\alpha^* - \alpha_0)\, A_{21} + (\beta^* - \beta_0)\, A_{22} = \frac{1}{n}\eta_2 - G_2(\alpha_0, \beta_0),$$

где

$$A_{i1} = G'_{ix}(\alpha_0 + \Theta(\alpha^* - \alpha_0), \beta_0 + \Theta(\beta^* - \beta_0));$$

$$A_{i2} = G'_{i\beta}(\alpha_0 + \Theta(\alpha^* - \alpha_0), \beta_0 + \Theta(\beta^* - \beta_0)); \; 0 < \Theta < 1.$$

Отсюда

$$\sqrt{n}\,(\alpha^* - \alpha_0) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\eta_1 - \sqrt{n}\;G_1(\alpha_0,\,\beta_0)}{A_{11}\,A_{22} - A_{12}\,A_{21}}\,A_{22} - {}$$
$$- \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\eta_2 - \sqrt{n}\;G_2(\alpha_0,\,\beta_0)}{A_{11}\,A_{22} - A_{12}\,A_{21}}\,A_{12}; \tag{2}$$

$$\sqrt{n}\,(\beta^* - \beta_0) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\eta_2 - \sqrt{n}\;G_2(\alpha_0,\,\beta_0)}{A_{11}\,A_{22} - A_{12}\,A_{21}}\,A_{11} - {}$$
$$- \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\eta_1 - \sqrt{n}\;G_1(\alpha_0,\,\beta_0)}{A_{11}\,A_{22} - A_{12}\,A_{21}}\,A_{21}. \tag{3}$$

Из доказанной сходимости по вероятности пары (α^*, β^*) к (α_0, β_0) и той же теореме Слуцкого следует, что знаменатель правых частей (2) и (3) при $n \to \infty$ сходится по вероятности к

$$G'_{1\alpha}(\alpha_0,\,\beta_0)\,G'_{2\beta}(\alpha_0,\,\beta_0) - G'_{1\beta}(\alpha_0,\,\beta_0)\,G'_{2\alpha}(\alpha_0,\,\beta_0).$$

В силу теоремы Муавра — Лапласа [2, 3] случайная величина $\eta_i/\sqrt{n}$ для больших n распределена асимптотически нормально со средним $\sqrt{n}\;G_i(\alpha_0,\,\beta_0)$ и стандартным отклонением $\sqrt{G_i(\alpha_0,\beta_0)\times}$ $\overline{\times\,[1 - G_i\;(\alpha_0,\;\beta_0)]}$. Короче, $\eta_i/\sqrt{n} \to N\;(\sqrt{n}\,G_i,\;\;\sqrt{G_i\,(1 - G_i)})_0$ (индекс 0 указывает, что следует брать то значение функции G_i, которое она принимает, когда $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$). Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\eta_i - \sqrt{n}\;G_i(\alpha_0,\,\beta_0) \to N\big(0,\,\sqrt{G_i\,(1 - G_i)}\,\big)_0.$$

При $n \to \infty$ A_{22} сходится по вероятности к $G'_{2\beta}(\alpha_0,\,\beta_0)$. Поэтому применение одной теоремы о сходимости (см., например, [2], стр. 281; [3], стр. 115) дает

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\eta_1 - \sqrt{n}\;G_1(\alpha_0,\,\beta_0)\right)\frac{A_{22}}{A_{11}\,A_{22} - A_{12}\,A_{21}} \to$$
$$\to N\left(0,\,\frac{G'_{2\beta}\,\sqrt{G_1\,(1 - G_1)}}{G'_{1\alpha}\,G'_{2\beta} - G'_{1\beta}\,G'_{2\alpha}}\right)_0. \tag{4}$$

Аналогично

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\eta_2 - \sqrt{n}\;G_2(\alpha_0,\,\beta_0)\right)\frac{A_{12}}{A_{11}\,A_{22} - A_{12}\,A_{21}} \to$$
$$\to N\left(0,\,\frac{G'_{1\beta}\,\sqrt{G_2\,(1 - G_2)}}{G^1_{1\alpha}\,G'_{2\beta} - G'_{1\beta}\,G'_{2\alpha}}\right)_0. \tag{5}$$

Так как случайные величины $\eta_1/\sqrt{n}$ и $\eta_2/\sqrt{n}$ независимы, то можно показать, что совместная функция распределения слагаемых правой части (2) при $n \to \infty$ стремится к произведению функций распределений (4) и (5). В таком случае, согласно теореме непрерывности для характеристических функций [2], свойствам последних, формулам (4) и (5), имеем

$$\sqrt{n}\ (\alpha^* - \alpha_0) \to N\left(0,\ \frac{\sqrt{G_1(1-G_1)\left[G'_{2\beta}\right]^2 + G_2(1-G_2)\left[G'_{1\beta}\right]^2}}{G'_{1x}\,G'_{2\beta} - G'_{1\beta}\,G'_{2x}}\right)_0. \qquad (6)$$

Отсюда находим асимптотическое распределение α^* для больших n. Аналогично можно получить, что

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\eta_2 - \sqrt{n}\ G_2(\alpha_0,\ \beta_0)}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}\,A_{11} \to N\left(0,\ \frac{G'_{1x}\sqrt{G_2(1-G_2)}}{G'_{1x}\,G'_{2\beta} - G'_{1\beta}\,G'_{2x}}\right)_0; \qquad (7)$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\eta_1 - \sqrt{n}\ G_1(\alpha_0,\ \beta_0)}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}\,A_{21} \to N\left(0,\ \frac{G'_{2x}\sqrt{G_1(1-G_1)}}{G'_{1x}\,G'_{2\beta} - G'_{1\beta}\,G'_{2x}}\right)_0; \qquad (8)$$

$$\sqrt{n}\ (\beta^* - \beta_0) \to N\left(0,\ \frac{\sqrt{G_1(1-G_1)\left[G'_{2x}\right]^2 + G_2(1-G_2)\left[G'_{1x}\right]^2}}{G'_{1x}\,G'_{2\beta} - G'_{1\beta}\,G'_{2x}}\right)_0. \qquad (9)$$

Асимптотическая нормальность оценок доказана.

Наконец, установим совместную асимптотическую эффективность $e(\alpha^*,\ \beta^*)$ оценок α^* и β^*, которая определяется [2, 3] как

$$e\,(\alpha^*,\ \beta^*) = \lim_{n\to\infty} e_n(\alpha^*,\ \beta^*) = \frac{\det r^{-1}}{\lim\limits_{n\to\infty} \det \mu^{(n)}},$$

где r — ковариационная матрица [3] (матрица вторых моментов [2]) $\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{\partial \log L}{\partial \alpha}$ и $\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{\partial \log L}{\partial \beta}$ (L — функция правдоподобия); $\mu^{(n)}$ — ковариационная матрица $\sqrt{n}\ \alpha^*$ и $\sqrt{n}\ \beta^*$. Из выражений (10)—(12) работы [1] следует, что

$$\det r = \left(\frac{\left[G'_{1x}\,G'_{2\beta} - G'_{1\beta}\,G'_{2x}\right]^2}{G_1\,G_2\,(1-G_1)\,(1-G_2)}\right)_0. \qquad (10)$$

Для вычисления $\lim\limits_{n\to\infty} \det \mu^{(n)}$ необходимо найти предельное значение $\mu_{11}^{(n)}$ ковариации $\sqrt{n}\ \alpha^*$ и $\sqrt{n}\ \beta^*$. Согласно определению, для больших n

$$\mu_{11}^{(n)} = E\,\sqrt{n}\ (\alpha^* - \alpha_0)\,\sqrt{n}\ (\beta^* - \beta_0) =$$

$$= \int_{R^4} (x_1 - x_2)\,(x_3 - x_4)\,d\,F^{(n)}\ (x_1,\ \ldots,\ x_4) = \sum_{i,\,j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(n)},$$

где $\lambda_{ij}^{(n)}$ — ковариация i-го слагаемого правой части (2) и j-го слагаемого правой части (3).

Так как совместные функции распределения одноименных слагаемых правых частей (2) и (3) при $n \to \infty$ стремятся к произведению соответствующих функций распределения, то $\lambda_{11}^{(n)}$ и $\lambda_{22}^{(n)}$ исчезают, когда $n \to \infty$. Что касается $\lambda_{12}^{(n)}$ и $\lambda_{21}^{(n)}$, то имеет место

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{12}^{(n)} = \left(\frac{G'_{2x}\, G'_{2\beta}\, G_1 (1 - G_1)}{\left[G'_{1x}\, G'_{2\beta} - G'_{1\beta}\, G'_{2x}\right]^2} \right)_0 ; \tag{11}$$

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{21}^{(n)} = \left(\frac{G'_{1x}\, G'_{1\beta}\, G_2 (1 - G_2)}{\left[G'_{1x}\, G'_{2\beta} - G'_{1\beta}\, G'_{2x}\right]^2} \right)_0 . \tag{12}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно найти предельные значения характеристических функций соответствующих пар слагаемых. Следовательно, согласно (6), (9), (11) и (12),

$$\lim_{n \to \infty} \det \mu^{(n)} = \left(\frac{G_1\, G_2\, (1 - G_1)(1 - G_2)}{\left[G'_{1x}\, G'_{2\beta} - G'_{1\beta}\, G'_{2x}\right]^2} \right)_0$$

и, таким образом, $e(\alpha^*, \beta^*) = 1$. Это означает [2, 3], что оценки асимптотически совместно эффективные. Утверждение доказано полностью.

ПУТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ УСЛОВИЙ 1—3 НА ПРАКТИКЕ И ПРИМЕР РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОРОГОВ, С НИМ СВЯЗАННЫЙ

Обратимся теперь к осуществлению условий доказанного утверждения.

Если после изготовления элементов установка значений их порогов срабатывания не производится, то условия 1 и 2 обычно практически выполняются, когда производство элементов есть установившийся технологический процесс. Дополнительные требования при наличии установки порогов на одно и то же значение срабатывания отмечались в [1].

Перейдем к условию 3. Для уменьшения влияния β всегда разумно (за исключением, по-видимому, примера, рассмотренного в [1]) прибегать, насколько это более или менее легко удается, к схемным методам стабилизации значения порога каждого элемента. Естественно, что при этом из-за наличия технологических погрешностей коэффициент чувствительности значения порога к изменению β от элемента к элементу подвержен значительным колебаниям и является случайной величиной. При удачно примененной стабилизации математическое ожидание упомянутого коэффициента близко к 0. Если теперь изготовленные элементы сортировать по знаку коэффициента чувствительности на два класса, то для i-го класса $G'_{i\beta}(x, \beta)$ будет больше или меньше 0. Вспомним теперь, что $G_i(x, \beta)$ является неубывающей по x функцией, и, следовательно, всегда $G'_{ix}(x, \beta) \geqslant 0$. Отсюда легко видеть, что, принимая для i-го подмножества элементы только i-го класса, можно выполнить и условие 3.

Перейдем к применению изложенных общих соображений к частному случаю, который заслуживает, по-видимому, особого внимания. Как и в [1], будем снова исходить из ситуации, когда при изготовлении элементов пороги срабатывания ориентировались на одно и то же значение m при $\beta = 0$. Предположим, что в результате технологических погрешностей у изготовленных элементов порог срабатывания меняется случайным образом от элемента к элементу и подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, когда $\beta = 0$. Что же касается коэффициента чувствительности γ, то будем считать его не зависящим ни от β, ни от значения порога срабатывания и имеющим нормальное распределение с нулевым средним и известной дисперсией τ^2. Если произведена сортировка элементов на два класса с отрицательным γ_1 и положительным γ_2 коэффициентами, то γ_1 и γ_2 имеют усеченные распределения [2] с функциями распределения:

$$P\{\gamma_1 \leqslant x\} = W_1(x) = \begin{cases} 2\Phi\left(\frac{x}{\tau}\right) & \text{при } x < 0; \\ 1 & \text{при } x \geqslant 0; \end{cases} \tag{13}$$

$$P\{\gamma_2 \leqslant x\} = W_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0; \\ 2\Phi\left(\frac{x}{\tau}\right) - 1 & \text{при } x > 0. \end{cases} \tag{14}$$

Согласно нашим предположениям, для всякого β порог срабатывания ζ_i элемента i-го класса определяется посредством $\zeta_i = \zeta_{i0} + \beta\gamma_i$, где ζ_{i0} — порог срабатывания при $\beta=0$. Из известного соотношения (см., например, [2], стр. 189) следует, что $\beta\gamma_i$ имеет плотность распределения

$$\frac{1}{|\beta|} W_i'\left(\frac{x}{\beta}\right). \tag{15}$$

Функции распределения порогов для всякого β определяются композицией $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ и распределений (15). Найдем их. Согласно (13) и (15), имеем:

$$G_1(x, \beta) = \frac{\sqrt{2}}{\tau\beta\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \Phi\left(\frac{x-m-z}{\sigma}\right) e^{-\frac{z^2}{2\tau^2\beta^2}} dz, \text{ если } \beta > 0;$$

$$G_1(x, \beta) = \frac{\sqrt{2}}{\tau|\beta|\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \Phi\left(\frac{x-m-z}{\sigma}\right) e^{-\frac{z^2}{2\tau^2\beta^2}} dz, \text{ если } \beta < 0.$$

Подстановка выражения для $\Phi\left(\frac{x-m-z}{\sigma}\right)$ дает при $\beta>0$

$$G_1(x, \beta) = \frac{1}{\sigma\tau\beta\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2\tau^2\beta^2}} dz \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-z-m)^2}{2\sigma^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint_D e^{-\frac{1}{2}(z^2+y^2)} dz\, dy,$$

где область интегрирования D определяется неравенствами: $z<0$, $y<(x-m-\tau\beta z)/\sigma$. Последний двойной интеграл можно представить через сумму двух известных функций. Для этого повернем координатные оси так, чтобы ось z стала параллельной прямой $y=(x-m-\tau\beta z)/\sigma$. Такой поворот выражается ортогональным преобразованием:

$$\sigma z - \tau\beta y = \sqrt{\sigma^2+\tau^2\beta^2}\, t; \quad \tau\beta z + \sigma y = \sqrt{\sigma^2+\tau^2\beta^2}\, u.$$

Применяя формулу замены переменных в двойном интеграле, получаем

$$G_1(x, \beta) = \frac{1}{\pi} \iint_{D'} e^{-\frac{1}{2}(t^2+u^2)} dt\, du,$$

причем область D' определяется неравенствами:

$$t < -\frac{\tau\beta}{\sigma}u = au; \quad u < \frac{x-m}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2\beta^2}} = h.$$

После введения пределов интегрирования имеем

$$G_1(x,\beta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{h} e^{-\frac{1}{2}u^2}du\int_{-\infty}^{au} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{h} e^{-\frac{1}{2}u^2}du\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{h} e^{-\frac{1}{2}u^2}du\int_{0}^{au} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt =$$

$$= \Phi\left(\frac{x-m}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2\beta^2}}\right) + 2T\left(\frac{x-m}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2\beta^2}},\ \frac{\tau\beta}{\sigma}\right),$$

где $T(h, a)$ — известный интеграл, численные значения которого имеются в таблицах [6]. Совершенно так же можно рассмотреть случай с $\beta<0$ и убедиться в том, что для всякого β

$$G_1(x,\beta) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2\beta^2}}\right) + 2T\left(\frac{x-m}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2\beta^2}},\ \frac{\tau\beta}{\sigma}\right). \quad (16)$$

Аналогичным образом записывается формула и для $G_2(x, \beta)$:

$$G_2(x,\beta) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2\beta^2}}\right) - 2T\left(\frac{x-m}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2\beta^2}},\ \frac{\tau\beta}{\sigma}\right). \quad (17)$$

Так как каждый из графиков плотностей распределений (13) и (14) является зеркальным изображением другого относительно оси ординат, то при реализации измерительного эксперимента число элементов с распределением (16) следует взять равным числу элементов с распределением (17). Обозначим его через n.

Если в результате эксперимента наблюденное значение η_i равно k_i, то оценки максимума правдоподобия α^*, β^* получаются в виде корня уравнений:

$$G_1(\alpha,\beta) = \frac{k_1}{n}; \quad G_2(\alpha,\beta) = \frac{k_2}{n}. \quad (18)$$

Так как для всякого h $T(h, a)>0$ $[T(h, a)<0]$, если $a>0$ $[a<0]$, то при решении системы (18) следует считать $\beta^*>0$ $[\beta^*<0]$, когда $k_1>k_2$ $[k_1<k_2]$. Для рассматриваемого примера, вообще говоря, система (18), по-видимому, не может быть разрешена в явном виде.

Чтобы заметить полезность увеличения числа элементов в эксперименте с малым n при оценивании измеряемой величины методом максимума правдоподобия, проведено небольшое численное исследование для $\sigma=\tau=1$. При этом в неопределенных случаях полагалось: $\alpha^* = \alpha_m = m-1$ — нижнее возможное значение α, когда $k_1=0$, $k_2<n$ или $k_1<n$, $k_2=0$; $\alpha^*=m$, когда $k_1=0$, $k_2=n$ или $k_1=n$, $k_2=0$; $\alpha^* = \alpha_M = m+1$ — верхнее возможное значение α, когда $k_1=n$, $k_2>0$ или $k_1>0$, $k_2=n$. В остальных случаях численные значения α^* находились с помощью таблицы значений функции, обратной функции нормального распределения (см., например, [7], таблица 1.3) и таблиц интеграла $T(h, a)$ [6]. Для сравнения математическое ожидание оценки и среднеквадратическое значение ошибки ее вычислены для нескольких значений α и β. Полученные результаты представлены в таблице.

n	2						5					
β	0			1			0			1		
$\alpha_0 - m$	0	0,305	0,807	0	0,305	0,807	0	0,305	0,807	0	0,305	0,807
$E(\alpha^* - m)$	0	0,353	0,772	0	0,273	0,641	0	0,357	0,785	0	0,352	0,767
$E(\alpha^* - \alpha_0)^2$	0,625	0,544	0,239	0,539	0,496	0,337	0,247	0,218	0,088	0,420	0,365	0,150

Из сравнения характеристик оценки хорошо видно, что увеличение числа элементов в каждом подмножестве с 2 до 5 уменьшило не только смещение оценки $E(\alpha^* - \alpha_0) = E(\alpha^* - m) - (\alpha_0 - m)$, но и среднеквадратическое значение ошибки оценки.

Необходимо отметить, что при малых n значения смещения и ошибки оценки сильно зависят от α_m и α_M. Поэтому нахождение их, если мы только не располагаем априорными значениями α_m, α_M, может оказаться затруднительным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если требуемая точность оценки измеряемой величины выше возможной точности установки значений порогов срабатывания, а также уровня флуктуаций последних и, кроме того, еще не удается практическими способами устранить нестабильность значений порогов, обусловленную мешающим воздействием, то для достижения желаемых результатов достаточно применения бо́льшего числа элементов, притом с разной чувствительностью к мешающему воздействию.

Полученные соотношения могут быть использованы для отыскания необходимого числа элементов. Для ответа на вопрос о том, начиная с каких значений n безопасно использование асимптотического выражения среднеквадратической ошибки оценки, требуются дополнительные исследования. Остается открытым и вопрос о нахождении наилучшей возможной оценки измеряемой величины при малых n.

Автор считает своим долгом выразить благодарность проф. М. П. Цапенко за интерес и внимание, проявленные к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Салов. Об оценке измеряемой величины множеством релейных элементов со случайным порогом срабатывания при наличии мешающего воздействия, ч 1. — Автометрия, 1969, № 2.
2. Г. Крамер. Математические методы статистики. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
3. С. Уилкс. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.
4. А. Я. Хинчин. Краткий курс математического анализа. М., Гостехиздат, 1953.
5. Е. Е. Слуцкий. О стохастических асимптомах и пределах. Избранные труды. М., Изд-во АН СССР, 1960.
6. Н. В. Смирнов, Л. Н. Большев. Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения. М., Изд-во АН СССР, 1962.
7. Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
30 августа 1968 г.