$$\sigma_\vartheta^2(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} \sigma_{\zeta i}^2(t)\, \sigma_{\zeta j}^2(t)\, r_{ij}(t) = \Delta K(t) \Delta^T, \qquad (10)$$

где $r_{ij}(t)$ — коэффициент корреляции между ζ_i и ζ_j в момент времени t; $\Delta = \left\{\frac{\partial f}{\partial \zeta_1}, \frac{\partial f}{\partial \zeta_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \zeta_m}\right\}$ — вектор-строка; индекс T означает транспонирование.

В частном случае, когда между различными компонентами вектора ζ, измеренными в один и тот же момент времени, корреляция отсутствует, (10) упрощается:

$$\sigma_\vartheta^2(t) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_i}\right)^2 \sigma_{\zeta_i}^2.$$

Введем $\varphi(t) = \frac{1}{\sigma_\vartheta^2(t)}$. Таким образом, задача вновь сводится к простейшей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Деннис. Математическое программирование и электрические цепи. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Т. Андерсон. Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963.

Поступило в редакцию 2 августа 1968 г., окончательный вариант — 9 декабря 1968 г.

УДК 629.7.058.5 : 620.1.08

А. В. ВЕРШИНСКИЙ

(Москва)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Точность измерительных систем в значительной степени определяется стабильностью динамических параметров, которые вследствие старения и износа за время эксплуатации могут подвергаться медленным изменениям. Даже небольшие неучитываемые отклонения динамических параметров порядка десятых долей процента в точных измерительных системах, например в навигационных, приводят к недопустимым ошибкам выходных координат. Для повышения качества измерительных систем, систем управления, а также для оценки работоспособности этих систем используются различные методы идентификации [1, 2]. В настоящей статье рассматривается метод определения динамических параметров навигационной системы, основанный на использовании информации, имеющейся в этой системе, с учетом ошибок измерений.

Положим, что поведение системы описывается уравнениями:

$$x_{n+1} = \Phi\, x_n; \tag{1}$$

$$z_n = h'\, x_n + \xi_n, \tag{2}$$

где Φ — переходная матрица, имеющая размеры $n \times n$ и ранг n; h — вектор связи координат x с измеряемой величиной z; ξ — ошибка измерения.

Будем полагать, что измеряется одна из компонент вектора x, т. е. $h' = [1, 0, \ldots, 0]$. Учитывая, что для линейных систем $\Phi_i(i) = \Phi_i$, из (2) и (1) можно получить:

$$\begin{cases} z_1 = h'\, x_1 + \xi_1; \\ z_2 = h'\, x_2 + \xi_2 = h'\, \Phi\, x_1 + \xi_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = h'\, x_n + \xi_n = h'\, \Phi^{n-1}\, x_1 + \xi_n, \end{cases} \tag{3}$$

или

$$F_n = C\, x_1 + V_n, \tag{4}$$

где

$$F_n' = [z_1, z_2, \ldots, z_n]; \quad V_n' = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]; \quad C = \begin{vmatrix} h' \\ h'\,\Phi \\ \ldots \\ h'\,\Phi^{n-1} \end{vmatrix}.$$

К системе (3) добавим еще одно $(n+1)$-е уравнение и отбросим первое уравнение. Полученную таким образом систему запишем аналогично (4):

$$F_{n+1} = C\, \Phi\, x_1 + V_{n+1}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) исключим x_1; тогда

$$F_{n+1} = \Phi_C\, F_n + M, \tag{6}$$

где

$$M = V_{n+1} - \Phi_C\, V_n;$$

$$\Phi_C = C\, \Phi\, C^{-1}. \tag{7}$$

Первые $n-1$ строк системы (6) устанавливают тривиальные связи между вектором F_n и одной из компонент этого вектора. Последняя строка, которую выделим особо,

$$z_{n+1} = \varphi'\, F_n + m_{n+1} \tag{8}$$

(φ' — последняя строка матрицы Φ_C) устанавливает связь между текущим измерением z_{n+1} и измерениями $z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1$, выполненными в предыдущие моменты времени.

Выполнив $i \geqslant 2n$ измерений, получим систему, состоящую из n (или более) уравнений вида (8). Решение этой системы по методу максимального правдоподобия позволит определить оценки координат вектора φ'. Здесь перейдем к схеме фильтрации Калмэна. Для этой цели используем зависимость

$$\hat{\varphi}_{i+1} = \hat{\varphi}_i + K\,(z_{i+1} - \hat{\varphi}'\, F_i). \tag{9}$$

Ошибка этой оценки описывается выражением

$$\Delta\hat{\varphi}_{i+1} = [E - K\, F_i']\, \Delta\hat{\varphi}_i + K\, m_{i+1},$$

где $\Delta\hat{\varphi} = \hat{\varphi} - \varphi_{\text{т}}$; $\varphi_{\text{т}}$ — точное значение φ, отвечающее (8) при $m=0$; E — единичная матрица; $F_i' = [z_{i-n+1}, z_{i-n+2}, \ldots, z_i]$.

Корреляционная матрица P_{i+1} ошибки $\Delta\hat{\varphi}_{i+1}$ имеет вид

$$P_{i+1} = (E - K\, F_i')\, P_i\, (E - K\, F_i')' + K\, \Psi\, K'. \tag{10}$$

где Ψ — дисперсия ошибки m.

Оптимальное значение K в (9) выберем из условия минимума следа $(\mathrm{Sp}\, P_{i+1})$ корреляционной матрицы ошибок (10). Примем $\frac{\mathrm{Sp}\, P_{i+1}}{\partial K} = 0$. При этом из (10) следует

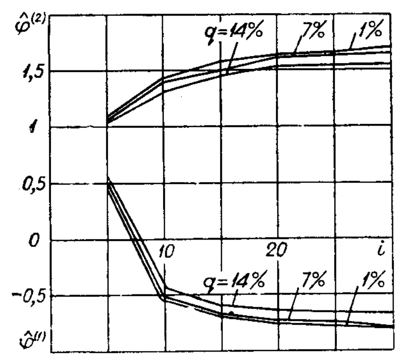
$$K = P_i F_i (F_i' P_i F_i + \Psi)^{-1}. \tag{11}$$

Подставив (11) в (9) и (10) и учитывая, что вследствие симметрии корреляционной матрицы $P' = P$, получим соответственно

$$\hat{\varphi}_{i+1} = \hat{\varphi}_i + P_i F' (F_i' P_i F_i + \Psi)^{-1} (z_{i+1} - \hat{\varphi}_i' F_i); \tag{12}$$

$$P_{i+1} = P_i - P_i F_i (F_i' P_i F_i + \Psi)^{-1} F_i' P_i. \tag{13}$$

Подставляя в рекуррентные формулы (12) и (13) приближенные начальные значения $\hat{\varphi}_1$ и P_1, а также Ψ и получаемые в результате измерений значения вектора $F_i' = [z_{i-n+1}, z_{i-n+2}, \ldots, z_i]$, найдем оценку вектора φ, после чего с помощью (7) легко перейти к искомым оценкам элементов матрицы Φ.



На рисунке показаны результаты моделирования на ЦВМ задачи определения параметров радиоинерциальной системы навигации, состоящей из инерциального ориентатора и доплеровского измерителя скорости. В качестве переходной матрицы такой системы использовалось выражение [3]

$$\Phi = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\frac{g}{\omega}\sin\omega t \\ \frac{1}{\omega R}\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix},$$

где g — ускорение подъемной силы; R — радиус Земли; $\omega^2 = \frac{g}{R}$.

Отсюда в соответствии с (7) $\varphi' = [\varphi^{(1)}; \varphi^{(2)}] = [-1; 2\cos\omega t_1]$. Наблюдаемый сигнал формировался с помощью модели $z_i = V_1 \cos ai - \alpha_1 \frac{g}{\omega} \sin ai + \xi_i$, где V_1 и α_1 — начальные отклонения скорости и углового положения платформы инерционального ориентатора; ξ — случайная нормальная ошибка со среднеквадратическим значением, равным σ.

Из рисунка следует, что оценки $\hat{\varphi}^{(1)}$ и $\hat{\varphi}^{(2)}$ при $q < 7\%$ $\left(q = \frac{\sigma}{V_1} = \frac{\sigma\omega}{\alpha_1 g}\right)$ быстро сходятся к точным значениям $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$, которые при принятом значении $\omega t_1 = a = 0{,}4$ соответственно равны -1 и 1,84.

Практически сигнал z вырабатывается навигационными измерительными системами в процессе их функционирования [3]. Это обстоятельство наряду со сравнительной простотой алгоритма может способствовать практическому применению рассмотренного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. А. Гельфандбейн. Методы кибернетической диагностики динамических систем. Рига, «Зинатне», 1967.
2. Н. С. Райбман, В. М. Чадеев. Адаптивные модели в системах управления. М., «Советское радио», 1966.
3. А. В. Вершинский. О построении алгоритма самоорганизующейся системы измерительных приборов.— Автометрия, 1966, № 5.

Поступило в редакцию
30 ноября 1967 г.