АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 4 1969

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.24

А. А. МАЛИЦКИЙ, Л. Г. РАСКИН

(Харьков)

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАЦИОНАЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ИЗМЕРЕНИЙ

1. **Постановка задачи.** При проведении исследований, связанных с необходимостью обработки результатов измерений, обычно основное внимание уделяется методам обработки уже имеющихся измерений. Вместе с тем существенный выигрыш может быть получен за счет рациональной организации самого процесса измерений. Соответствующая задача формулируется следующим образом.

Измеряется некоторая векторная функция $\Theta = \Theta(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m)$. На результаты измерений H накладывается нестационарный случайный процесс E таким образом, что $H = \Theta + E$. Случайный процесс E играет роль ошибки измерений.

Пусть n измерений осуществляется в течение временного интервала $[T_н, T_к]$ при условии, что промежуток между соседними измерениями $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ не менее заданного Δt. Здесь t_k — — момент проведения k-го измерения; $k=2, 3, \ldots, n$. При этом продолжительность интервала измерений позволяет в принципе провести более чем n измерений, т. е.

$$n \Delta t < T_к - T_н. \tag{1}$$

В связи с этим возникает задача рационального с точки зрения избранного критерия выбора момента измерений. Удобно начать с рассмотрения простейшей задачи этого класса.

Пусть измерению подлежит постоянная величина ϑ. Измерения производятся со случайной ошибкой, распределенной по нормальному закону $N(0, \sigma(t))$, причем $\sigma(t)$ — известная функция времени. Измерения, проводимые в различные моменты времени, независимы.

Поскольку в рассматриваемой задаче естественно интересоваться статистической оценкой величины ϑ, то в качестве критерия эффективности организации процедуры измерений разумно выбрать дисперсию σ^{*2} оценки ϑ по множеству проведенных измерений.

2. **Построение математической модели.** Пусть σ_i — среднеквадратическая ошибка измерения в момент времени $t = t_i$. При этом, как известно,

$$\frac{1}{\sigma^{*2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}. \tag{2}$$

Поставленная задача может быть сформулирована следующим образом: отыскать набор $\{t_i^*\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, максимизирующий (2) и удовлетворяющий ограничениям:

$$t_i \in [T_н, T_к] \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad t_k - t_{k-1} \geqslant \Delta t \quad (k = 2, 3, \ldots, n). \tag{3}$$

Сформулированная задача очевидным образом может быть сведена к следующей стандартной задаче математического программирования: отыскать набор $\{x_k^*\}$ $(k=1, 2, \ldots, n+1)$, максимизирующий целевую функцию

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi\left\{T_{\text{н}} + \sum_{k=1}^{i} [x_k + (i-1)\,\Delta t]\right\} \tag{4}$$

и удовлетворяющий ограничениям:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k = T_{\text{к}} - T_{\text{н}} - (n-1)\,\Delta t = T^*_{\text{набл}}; \tag{5}$$

$$x_k \geqslant 0;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1,$$

где

$$x_k = \Delta t_k - \Delta t;\quad k = 1, 2, \ldots, n+1;\quad \Delta t_1 = t_1 - (T_{\text{н}} - \Delta t);$$

$$\Delta t_{n+1} = (T_{\text{к}} + \Delta t) - t_n;\quad \varphi(t) = \frac{1}{\sigma^2(t)}.$$

Задача, поставленная в таком виде, может быть решена методом множителей Лагранжа. Однако решение может оказаться на границе области ограничений. При этом, как известно [1], решение задачи, т. е. оптимальный набор $\{x^*_k\}$, дается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_s} + \omega_s = 0; & s = 1, 2, \ldots, n+1; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0; \\ x_s\,\omega_s = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $F(x) = \Phi(x) + \lambda\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k - T^*_{\text{набл}}\right)$ — функция Лагранжа; λ — множитель Лагранжа.

Так как целевая функция максимизируется, то $\omega_s \geqslant 0$. Используя (4) и (5), перепишем (6) в виде

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=s}^{n} \dfrac{\partial\varphi\left[T_{\text{н}} + \sum\limits_{k=1}^{i} x_k + (i-1)\,\Delta t\right]}{\partial x_i} + \lambda + \omega_s = 0; & s = 1, 2, \ldots, n; \\ \sum\limits_{k=1}^{n+1} x_k = T^*_{\text{набл}}; \\ x_k\,\omega_k \geqslant 0;\quad \lambda + \omega_{n+1} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Решение системы (7) определяет искомый оптимизирующий набор.

3. **Некоторые обобщения.** Пусть необходимо получить статистическую оценку постоянной величины ϑ, непосредственное измерение которой невозможно. Для получения оценки используются измерения некоторой другой величины ζ, с которой ϑ связана известным соотношением

$$\vartheta = f(\zeta). \tag{8}$$

При этом аналогично предыдущему случаю измерения величины ζ осуществляются со случайной ошибкой, распределенной по нормальному закону $N(0, \sigma(\zeta))$, и измерения независимы. В соответствии с (8), как известно, для достаточно малых ошибок

$$\sigma^2_\vartheta = \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 \sigma^2_\zeta(t). \tag{9}$$

Введем $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sigma^2_\vartheta}$. Очевидно, задача сводится к предыдущей.

Рассмотрим, наконец, случай, когда оцениваемая постоянная величина ϑ является известной функцией нескольких непосредственно измеряемых величин $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$,

$$\sigma_{\vartheta}^{2}(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta_i \, \partial \zeta_j} \sigma^2_{\zeta\, i}(t)\, \sigma^2_{\zeta\, j}(t)\, r_{ij}(t) = \Delta\, K(t)\, \Delta^{T}, \qquad (10)$$

где $r_{ij}(t)$ — коэффициент корреляции между ζ_i и ζ_j в момент времени t; $\Delta = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \zeta_1}, \frac{\partial f}{\partial \zeta_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \zeta_m} \right\}$ — вектор-строка; индекс T означает транспонирование.

В частном случае, когда между различными компонентами вектора ζ, измеренными в один и тот же момент времени, корреляция отсутствует, (10) упрощается:

$$\sigma_{\vartheta}^{2}(t) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_i} \right)^2 \sigma^2_{\zeta_i}.$$

Введем $\varphi(t) = \frac{1}{\sigma_{\vartheta}^{2}(t)}$. Таким образом, задача вновь сводится к простейшей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Деннис. Математическое программирование и электрические цепи. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Т. Андерсон. Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963.

Поступило в редакцию
2 августа 1968 г.,
окончательный вариант —
9 декабря 1968 г.

УДК 629.7.058.5 : 620.1.08

А. В. ВЕРШИНСКИЙ

(Москва)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Точность измерительных систем в значительной степени определяется стабильностью динамических параметров, которые вследствие старения и износа за время эксплуатации могут подвергаться медленным изменениям. Даже небольшие неучитываемые отклонения динамических параметров порядка десятых долей процента в точных измерительных системах, например в навигационных, приводят к недопустимым ошибкам выходных координат. Для повышения качества измерительных систем, систем управления, а также для оценки работоспособности этих систем используются различные методы идентификации [1, 2]. В настоящей статье рассматривается метод определения динамических параметров навигационной системы, основанный на использовании информации, имеющейся в этой системе, с учетом ошибок измерений.