АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1969

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АВТОМЕТРИИ

УДК 681.142.82

Ю. Р. ОСТЕР-МИЛЛЕР

(Челябинск)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ОШИБКИ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Дискретный метод измерения получил довольно широкое распространение. Недостатком этого метода является то, что часть информации об измеряемом процессе разрушается. Поэтому при восстановлении непрерывной записи процесса, например методом линейной интерполяции, появляется дополнительная погрешность — погрешность инреполяции (рис. 1):

$$q(t) = Q(t) - \widetilde{Q}(t), \tag{1}$$

где $Q(t)$ — измеряемый процесс; $\widetilde{Q}(t)$ — интерполированный процесс. Эта погрешность зависит как от характера протекания процесса, так и от величины шага квантования по времени. Знание такой погрешности позволит решить ряд метрологических задач: выбрать оптимальный шаг квантования, выполнить оптимальную фильтрацию и т. д.

Ниже дается метод определения статистических характеристик погрешности линейной интерполяции случайного стационарного (в широком смысле) процесса, обладающего свойствами эргодичности.

Предлагается по известным шагу квантования T и автокорреляционной функции $R(\tau)$ [спектральной плотности $s(\omega)$] процесса определить автокорреляционную функцию (спектральную плотность) погрешности линейной интерполяции. Решение аналогичной задачи, но при ступенчатой интерполяции измеряемого процесса дается в [1].

Значение линейно интерполированного процесса для момента времени t можно представить как

$$\widetilde{Q}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{\{Q[(n+1)T] - Q(nT)\}\lambda_1 + Q(nT)\} 1_T(t - nT), \tag{2}$$

где $\lambda_1 = \frac{1}{T}(t - nT)$; $1_T(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant t < T \\ 0 \text{ при } T \leqslant t < \infty \end{cases}$ — единичноимпульсная функция; T — шаг квантования по времени. А для момента времени, равного $t+\tau$,

$$\widetilde{Q}(t+\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{\{Q[(n+k+1)T]-Q[(n+k)T]\}\lambda_2+$$
$$+Q[(n+k)T]\}\,1_T[t-(n+k)T], \qquad (3)$$

где τ — время смещения; $\lambda_2=\frac{1}{T}[t+\tau-(n+k)T]$.

Корреляционную функцию от (1) можно найти путем усреднения по ансамблю. Полагая известным множество $\{Q_\eta(t)\}$ случайного процесса $Q(t)$ и зафиксировав время t, получим ансамбль, по которому можно найти значение корреляционной функции для момента времени t. Усреднив по времени, эту функцию можно сделать стационарной, т. е. независимой от времени. Искомая корреляционная функция, согласно (1)—(3), является суммой

$$A(\tau)=\sum_{i=1}^{4}A_i(\tau), \qquad (4)$$

определение членов которой приводится ниже.

Первый член суммы является автокорреляционной функцией исходного процесса

$$A_1(\tau)=R(\tau)=M[Q(t)Q(t+\tau)], \qquad (5)$$

где M — операция математического ожидания.

Умножив (2) на (3), найдем, что математическое ожидание для момента времени t равно

$$M_\lambda[\widetilde{Q}(t)\widetilde{Q}(t+\tau)]=\lambda_1\lambda_2\{2R(kT)-R[(k+1)T]-R[(k-1)T]\}+$$
$$+\lambda_1\{R[(k-1)T]-R(kT)\}+\lambda_2\{R[(k+1)T]-R(kT)\}+R(kT), \qquad (6)$$

где $R(kT)$ — дискретные значения автокорреляционной функции случайного процесса $R(\tau)$.

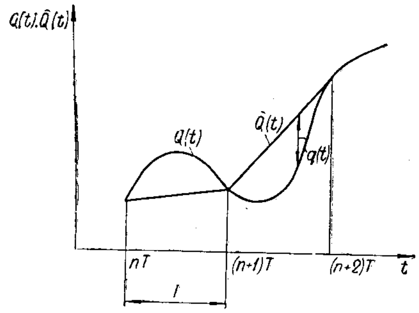

Рис. 1

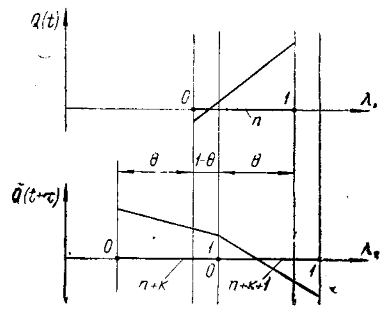

Рис. 2.

На рис. 2 изображены интервалы (n, $n+k$, $n+k+1$ — номера интервалов) процессов $\widetilde{Q}(t)$ и $\widetilde{Q}(t+\tau)$; согласно рисунку выполнено усреднение по времени выражения (6). Итогом усреднения по времени явилась формула для определения второго члена суммы (4):

$$A_2(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-1}^{2}R[(k+m)T]\,F_m\left(\frac{\Delta\tau}{T}\right)1_T(\tau-kT), \qquad (7)$$

где $\tau=kT+\Delta\tau$; $F_m\left(\frac{\Delta\tau}{T}\right)=\sum_{\tau=0}^{3} a_{mi}\left(\frac{\Delta\tau}{T}\right)^i$;

a_{mi} — коэффициенты, значения которых приведены в таблице.

Учитывая (2) и полагая $t=nT+\Delta t$, получим

$$M_\lambda[\tilde{Q}(t)\,Q(t+\tau)]=\lambda_1 R(\Delta t+\tau-T)+(1-\lambda_1)R(\Delta t+\tau). \quad (8)$$

Усредняя по времени выражение (8), определим значение третьего члена суммы (4):

Значения коэффициентов

i	m			
	-1	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0
3	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$$A_3(\tau)=\frac{1}{T^2}\left[\int_{\tau-T}^{\tau} R(s)(s-\tau)\,d\tau+\int_{\tau}^{\tau+T} R(s)(\tau-s)\,ds+T\int_{\tau-T}^{\tau+T} R(s)\,ds\right]. \quad (9)$$

Если в выражении (8) выполнить подстановку $t_1=t+\tau$, то нетрудно показать, что

$$A_4(\tau)=A_3(\tau). \quad (10)$$

Просуммировав (5), (7), (9) и (10), согласно (4), получим автокорреляционную функцию погрешности линейной интерполяции:

$$A(\tau)=R(\tau)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-1}^{2} R[(k+m)T]\,F_m\left(\frac{\Delta\tau}{T}\right)1_T(\tau-kT)-$$

$$-\frac{2}{T^2}\left[\int_{\tau-T}^{\tau} R(s)(s-\tau)\,ds+\int_{\tau}^{\tau+T} R(s)(\tau-s)\,ds+T\int_{\tau-T}^{\tau+T} R(s)\,ds\right]. \quad (11)$$

Если известна корреляционная функция, то, выполнив над ней преобразование Фурье, можно определить спектральную плотность случайного процесса [2].

Выполнив почленно преобразование Фурье над (11), согласно [2], найдем спектральную плотность случайного процесса (1). Преобразование над (5) дает спектральную плотность измеряемого процесса

$$P_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau=s(\omega); \quad (12)$$

для (7) можно найти, что

$$P_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-1}^{2} R[(k+m)T]\,F_m\left(\frac{\Delta\tau}{T}\right)1_T(\tau-kT)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau. \quad (13)$$

Изменив в (13) последовательность операций суммирования и интегрирования и учитывая свойства единичноимпульсной функции, получим

$$P_2(\omega)=G(\beta)\sum_{q=-\infty}^{\infty} R(qT)\,e^{-j\omega qT}, \quad (14)$$

где $G(\beta) = T \sum_{m=-1}^{2} e^{jm\beta} \int_0^1 F_m(\theta) e^{-j\beta\theta} d\theta$; $\beta = \omega T$; $\theta = \frac{\Delta\tau}{T}$. Взяв определенный интеграл и просуммировав по m, можно $G(\beta)$ свести к виду

$$G(\beta) = T \left[\frac{2(1-\cos\beta)}{\beta^2}\right]^2. \tag{15}$$

Известно [3], что

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} R(qT)\, e^{-j\omega qT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right). \tag{16}$$

Подставив (15) и (16) в (14), получим спектральную плотность линейно интерполированного случайного стационарного процесса

$$P_2(\omega) = \left[\frac{2(1-\cos\beta)}{\beta^2}\right]^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right). \tag{17}$$

Теперь выполним преобразование Фурье над первым членом (9):

$$g_1(\omega) = \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \int_{\tau-T}^{T} R(s)(s-\tau)\, ds\, d\tau. \tag{18}$$

Изменив в (18) порядок интегрирования и выполнив подстановку $x = s - \tau$, найдем, что

$$g_1(\omega) = -\frac{1}{T^2} s(\omega) \int_{-T}^{0} x e^{-j\omega x} dx. \tag{19}$$

Аналогично определив $g_2(\omega)$ по второму члену (9), нетрудно убедиться в том, что он является комплексно сопряженным с $g_1(\omega)$, поэтому

$$g_1(\omega) + g_2(\omega) = 2\,\mathrm{Re}\,[g_1(\omega)] = -\frac{2}{\beta^2}[\beta\sin\beta - (1-\cos\beta)]. \tag{20}$$

Преобразование Фурье над оставшимся членом (9) следует выполнить аналогично (18), что даст

$$g_3(\omega) = 2\frac{\sin\beta}{\beta} s(\omega). \tag{21}$$

Просуммировав (20) и (21), найдем взаимную спектральную плотность случайного стационарного процесса и его линейной интерполяции

$$P_3(\omega) = \frac{2(1-\cos\beta)}{\beta^2} s(\omega). \tag{22}$$

Согласно (10),

$$P_4(\omega) = P_3(\omega). \tag{23}$$

Просуммировав (12), (17), (22) и (23), найдем формулу для определения спектральной плотности ошибки линейной интерполяции случайного стационарного процесса

$$P(\omega) = \left[\frac{2(1-\cos\beta)}{\beta^2}\right]^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) + \left[1 - \frac{4(1-\cos\beta)}{\beta^2}\right] s(\omega), \tag{24}$$

где $s(\omega)$ — спектральная плотность интерполируемого процесса.

На рис. 3 представлены корреляционные функции ошибки линейной интерполяции случайных стационарных процессов, корреляционные функции которых имеют вид

$$R(\tau)=5e^{-\alpha|\tau|}.$$

Расчет выполнен при шаге квантования $T=1$ *сек*.

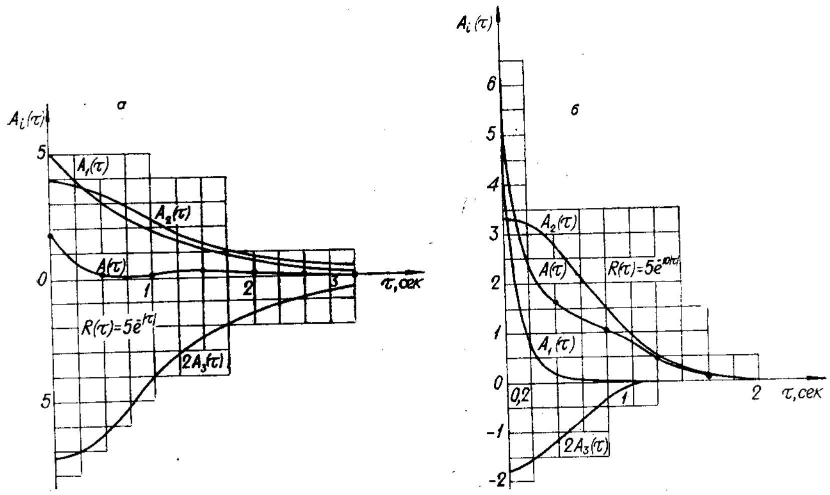

Рис. 3.

Рассмотрим более подробно функцию $A_2(\tau)$. Она вычисляется по автокорреляционной функции исходного процесса путем усреднения по четырем ее дискретным значениям $\sum_{m=-1}^{2} R[(k+m)T]$, где $k=\ldots, -1, 0, 1, 2\ldots$. Функция же $F_m\left(\frac{\Delta\tau}{T}\right)$ является весовой функцией этих дискретных значений $R(\tau)$. Функция $A_2(\tau)$ всюду является непрерывной, гладкой и четной. Это справедливо при условии, если корреляционная функция исходного процесса имеет конечное число конечных разрывов, т. е. охватывается весь класс практически значимых функций.

Анализируя графики корреляционных функций, представленных на рис. 3, *а*, можно сказать, что чем «спокойнее» характер исходного процесса, тем при фиксированном шаге квантования функции $A_2(\tau)$ и $A_3(\tau)$ менее отличаются от $A_1(\tau)$, а корреляционная функция ошибки $A(\tau)$ уменьшается. Если случайный процесс является быстропеременным на интервале времени квантования (см. рис. 3, *б*), то дисперсия ошибки $D_q=A(0)$ может превзойти дисперсию исходного процесса $D_Q=R(0)=A_1(0)$. Можно утверждать, что

$$A_1(0)>A_2(0)>A_3(0).$$

Неравенство (37) следует объяснить тем, что, во-первых, интерполированный процесс всегда «спокойнее» исходного, поэтому $A_1(0)>A_2(0)$. Во-вторых, взаимная дисперсия «спокойного» и «неспокойного» процессов всегда будет меньше дисперсий от каждого из этих процессов.

Все рассуждения относительно соотношения между характером интерполируемого процесса и временем квантования остаются справедливыми и для спектральной плотности.

Выводы

Получены формулы, с помощью которых можно определить корреляционные функции и спектральные плотности: а) ошибки линейной интерполяции случайного стационарного (в широком смысле) процесса; б) линейно интерполированного случайного стационарного (в широком смысле) процесса и его линейной интерполяции.

При увеличении шага квантования увеличивается дисперсия ошибки линейной интерполяции, причем эта дисперсия может быть больше дисперсии исходного процесса.

Автокорреляционная функция линейно интерполированного стационарного (в широком смысле) процесса $A_2(\tau)$ является всюду непрерывной, гладкой и четной.

Полученные формулы могут найти применение при анализе погрешности, вызванной дискретным характером измерения, при выборе оптимального фильтра, обеспечивающего минимум дисперсии погрешности измерения и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Сафронов. Корреляционные функции и спектральные плотности разности двух случайных функций, квантованных по времени.— Автоматика и телемеханика, 1962, № 6.
2. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.
3. Б. Р. Левин. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М., «Советское радио», 1960.

Поступила в редакцию
16 мая 1968 г.