

8. В. И. Тихонов. Плотности поверхностей для длительностей выбросов флюктуаций.— Радиотехника, 1960, № 9.  
 9. А. А. Смердов. Распределение длительности выбросов частотно ограниченного случайного процесса.— В сб. «Методы отбора и передачи информации». Киев, «Наукова думка», 1965.

Поступило в редакцию  
1 апреля 1968 г.

УДК 681.142.5.038

Е. Н. КАРЫШЕВ  
(Новосибирск)

### О ПОГРЕШНОСТЯХ ПОЛЯРНЫХ КОРРЕЛЯТОРОВ

Простые по структуре, наладке и эксплуатации могут быть созданы корреляторы при использовании полярного метода, предназначенного для обработки реализаций эргодических стационарных процессов с нормальным законом распределения [1, 2]. Он основан на связи нормированной корреляционной функции  $\rho(\tau)$  и вероятности  $q$  совпадения знаков отклонений ординат центрированной случайной функции для двух моментов времени  $t$  и  $t+\tau$ . Для совпадения одинаковых знаков имеем

$$\rho_{--}(\tau) = \rho_{++}(\tau) = \sin \left\{ \frac{\pi}{2} [4 q_{\pm\pm}(\tau) - 1] \right\}, \quad (1)$$

для совпадения различных знаков —

$$\rho_{+-}(\tau) = \rho_{-+}(\tau) = \cos 2 \pi q_{\pm\mp}(\tau). \quad (2)$$

Легко видеть, что вероятности различных сочетаний знаков связаны следующими соотношениями:

$$q_{-+} = q_{+-}; \quad q_{++} = q_{--} = \frac{1}{2} - q_{-+} = \frac{1}{2} - q_{+-}.$$

В [3] описан одиннадцатиканальный фотоэлектронный полярный коррелятор, для которого исходные данные должны быть представлены в виде знаковой функции, т. е. в виде чередования темных и светлых полос на фотопленке шириной 35 мм. При получении знаковых функций центрированного случайного процесса преобразователь аналогового напряжения в последовательность прямоугольных импульсов, соответствующих знаку процесса, вносит погрешность, обусловленную конечным порогом чувствительности нелинейного элемента (например, усилителя — ограничителя). Эта погрешность эквивалентна погрешности от неточного центрирования случайного процесса.

Определим ее для всех возможных способов вычисления нормированных корреляционных функций, соответствующих выражениям (1) — (2). Для этого будем интегрировать двумерную плотность вероятности нормального случайного процесса с математическим ожиданием для процессов  $x_1$  и  $x_2$  одинаковым и не равным нулю; примем равными среднеквадратические отклонения  $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma$ . Вероятность совпадения различных знаков равна

$$\begin{aligned} q_{\mp\pm} &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} f(x_1) f(x_2/x_1) dx_1 dx_2 + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 f(x_1) f(x_2/x_1) dx_1 dx_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\sqrt{1-\rho_{x_1,x_2}^2}} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x_1-a)^2}{2\sigma_{x_1}^2}} dx_1 \times \right. \\
&\times \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{x_1,x_2}^2)} \left( \frac{x_2-a}{\sigma_{x_2}} - \rho_{x_1,x_2} \frac{x_1-a}{\sigma_{x_1}} \right)^2} dx_2 + \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x_1-a)^2}{2\sigma_{x_1}^2}} dx_1 \times \\
&\times \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{x_1,x_2}^2)} \left( \frac{x_2-a}{\sigma_{x_2}} - \rho_{x_1,x_2} \frac{x_1-a}{\sigma_{x_1}} \right)^2} dx_2. \quad (3)
\end{aligned}$$

После преобразований (3) получим

$$\begin{aligned}
q_{\mp \pm} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-C/\sqrt{2}} e^{-u^2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{C/\sqrt{2}}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right] du + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-C/\sqrt{2}}^{\infty} e^{-u^2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{C/\sqrt{2}}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right] du, \quad (4)
\end{aligned}$$

где  $C = \frac{a}{\sigma}$ ;  $\rho = \rho_{x_1,x_2}$ . Аналогично можно получить формулу для вероятности совпадения одинаковых знаков

$$\begin{aligned}
q_{\pm \pm} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-C/\sqrt{2}}^{\infty} e^{-u^2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{C/\sqrt{2}}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right] du + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-C/\sqrt{2}} e^{-u^2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{C/\sqrt{2}}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right] du. \quad (5)
\end{aligned}$$

Каждое слагаемое в (4) и (5) представляет собой зависимость соответствующей вероятности от  $\rho$ . На рис. 1—3 даны зависимости вероятности от коэффициента корреляции  $\rho$ , вычисленные по формулам (4) и (5) на УЦВМ М-20 для различных значений  $C$ . Эти характеристики позволяют определять точные значения коэффициента корреляции по вычисленной вероятности совпадения знаков нецентрированного случайного стационарного процесса с нормальным законом распределения.

Далее рассмотрим погрешность полярных корреляторов, вызванную тем, что вместо использования «непрерывной» знаковой функции вероятность совпадения знаков вычисляется по отсчетам, взятым в дискретные моменты времени. Оценим погрешность вероятности от количества отсчетов на период максимальной частоты исследуемого процесса. Оценка вероятности

$$q^* = \frac{T_i}{T_{\text{общ}}},$$

где  $T_i$  — суммарное время совпадения знаков,  $T_{\text{общ}}$  — общее время наблюдения процесса, является несмещенной. В качестве меры точности примем дисперсию или среднеквадратическое отклонение от истинного значения  $q$ . В случае непрерывного усреднения имеем

$$\sigma_{q_{\text{н}}}^2 = M \left[ \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt - q \right\}^2 \right] = \frac{2}{T} \int_0^T \left( 1 - \frac{\tau}{T} \right) R_y(\tau) d\tau, \quad (6)$$

при дискретизации по времени

$$\sigma_{q_{\text{д}}}^2 = \frac{1}{N} R_y(0) + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \left( 1 - \frac{n}{N} \right) R_y(n\Delta), \quad (7)$$

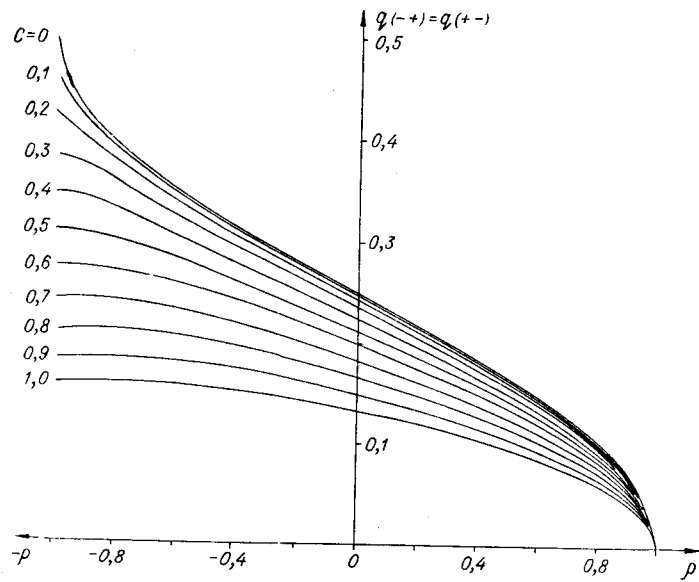


Рис. 1.

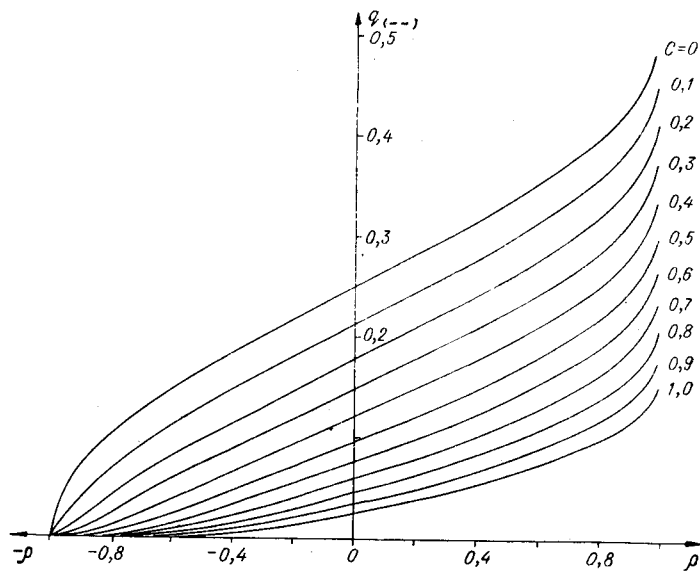


Рис. 2.

где

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } x(t) \leq a; \\ 0 & \text{при } x(t) > a. \end{cases}$$

Используя метод разложения корреляционной функции случайного процесса на выходе нелинейного элемента релейного типа по степеням нормированной функции  $r_x(\tau)$  случайного воздействия, имеющего нормальный закон распределения [4], находим

$$R_y(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2(m_x, \sigma_x) \frac{r_x^n(\tau)}{n!}. \quad (8)$$

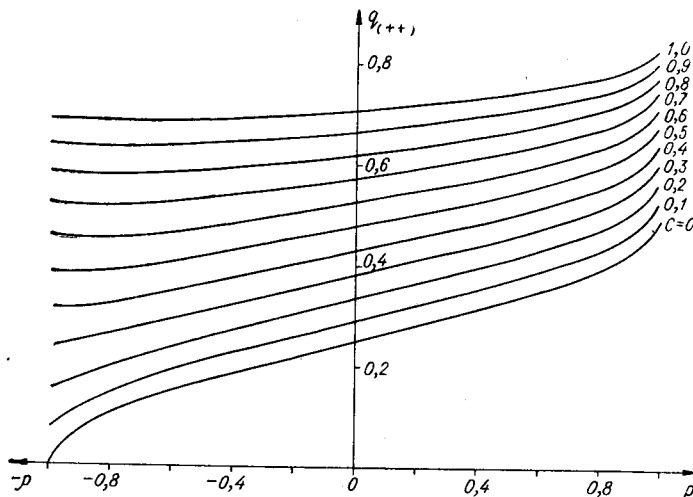


Рис. 3.

Значения  $C_n(m_x, \sigma_x)$  равны

$$C_n(m_x, \sigma_x) = (-1)^n B \varphi^{(n-1)} \left( \frac{m_x}{\sigma_x} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}$ ;  $\varepsilon = \frac{a - m_x}{\sigma_x}$ . Полагая  $m_x = 0$  и  $a=0$ , что соответствует знаковой функции, из (8) получаем

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left[ r_x(\tau) + \frac{1}{6} r_x^3(\tau) + \dots \right]. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6) и (7), находим выражения дисперсий при различных способах усреднения:

$$\begin{aligned} \sigma_{q_n}^2 &= \frac{1}{T\pi} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \left[ r_x(\tau) + \frac{1}{6} r_x^3(\tau) + \dots \right] d\tau; \\ \sigma_{q_{\Delta}}^2 &= \frac{1}{2N\pi} \left\{ \left[ r_x(0) + \frac{1}{6} r_x^3(0) + \dots \right] + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ r_x(n\Delta) + \frac{1}{6} r_x^3(n\Delta) + \dots \right] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

На основании сравнения дисперсий оценок вероятности  $q$  при различных способах усреднения на интервале  $(0, T)$  определим число отсчетов на период  $f_{\max}$  для

получения допустимой погрешности от квантования по времени. Для этого зададимся нормированной корреляционной функцией вида

$$r_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}. \quad (11)$$

Получим  $\alpha$  из условия ограничения энергетического спектра максимальной частотой  $f_{\max}$ . Спектральная плотность равна

$$S(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Для спектра, ограниченного частотой  $\omega_{\max}$ , имеем

$$r^*(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\alpha d \omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_{\max}}{\alpha},$$

откуда можно определить  $\alpha$ , если принять, что неучтенная часть спектра составляет  $l\%$ , т. е.

$$\alpha = d f_{\max}. \quad (12)$$

где 
$$d = \frac{2\pi}{\operatorname{tg}(1-l) \frac{\pi}{2}}.$$

$l, \%$	5	10	15	20
$d$	0,4945	0,9951	1,5086	2,0413

Подставим (11) и (12) в (10) и после преобразований с учетом замены в формуле для  $\sigma_{qn}^2$  вида  $T f_{\max} = \frac{N}{k}$ , где

$k$  — число отсчетов на период максимальной частоты, получим:

$$\sigma_{qn}^2 = \frac{(57 d N + 55 k) k}{54 \pi \cdot d^2 N^2};$$

$$\sigma_{qd}^2 = \frac{1}{\pi N} \left\{ \frac{7}{12} + \sum_{n=1}^{N-1} \times \right.$$

$$\left. \times \left( 1 - \frac{n}{N} \right) e^{-\frac{d}{k} n} \left( 1 + \frac{1}{6} e^{-\frac{2d}{k} n} \right) \right\}.$$

(13)

Относительная дисперсия равна

$$\gamma_q = \left( \frac{\sigma_{qd}^2}{\sigma_{qn}^2} - 1 \right) 100\%. \quad (14)$$

На рис. 4, а представлены графики  $\gamma_q$  в зависимости от количества отсчетов на период  $f_{\max}$  при  $N = \text{const}$  и различных  $l$ , вычисленные на УЦВМ М-20 по формуле (14) с учетом (13), а на рис. 4, б — графики  $\gamma_q = f(N)$  при  $k = \text{const}$  и различных  $l$ . На основании полученных зависимостей можно отметить, что с относительной дисперсией, не превышающей 1%, возможно квантование знаковой функции с шагом,

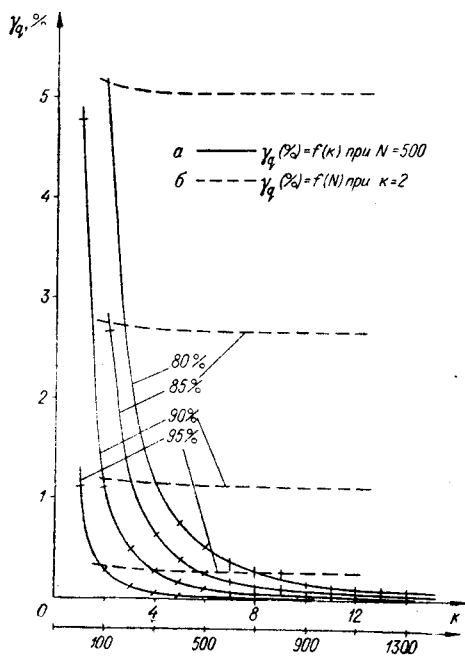


Рис. 4.

определяемым пятью отсчетами на период максимальной частоты исследуемого процесса, а с увеличением времени усреднения при постоянном  $k$  относительная дисперсия оценки вероятности, вызванная дискретизацией процесса по времени, практически не изменяется.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Гершман, Е. Л. Фейнберг. Об измерении коэффициента корреляции.— Акустический журнал, 1955, т. I, вып. 4.
2. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. Л., Судпромгиз, 1961.
3. Е. Н. Карышев, Б. С. Синицын. Фотоэлектронный полярный коррелятор.— ПНТПО, № 18—65—908/62. М., ГОСИНТИ, 1965.
4. Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления, т. II. М., «Советское радио», 1963.

*Поступило в редакцию  
18 апреля 1968 г.*