АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1969

УДК 621.317.795.2.087.7

Э. И. ВОЛОГДИН
(Одесса)

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ В ЦИФРОВОЙ КОД МЕТОДОМ КОРРЕЛЯЦИОННОГО УСРЕДНЕНИЯ

Для повышения точности несинхронизированных аналого-цифровых преобразователей [1] применяют усреднение кода ряда однократных преобразований [2, 3]. Если преобразования независимы, то при усреднении дисперсия кода уменьшается в n раз:

$$D(Y) = \frac{D(X)}{n}, \tag{1}$$

где $D(Y)$ — дисперсия среднего значения кода; $D(X)$ — дисперсия кода однократного преобразования; n — число усредняемых преобразований.

В общем случае преобразования могут быть коррелированными и тогда дисперсия среднего определяется в виде

$$D(Y) = \frac{D(X)}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{i}^{n}\sum_{\neq j}^{n} K(X_i X_j), \tag{2}$$

где $K(X_i X_j)$ — корреляционные моменты между значениями кода в i-м и j-м преобразованиях.

Из (2) следует, что при общей отрицательной корреляции дисперсия кода в случае зависимых преобразований меньше, чем в случае независимых. Следовательно, созданием упорядоченной отрицательной корреляции можно повысить точность аналого-цифровых преобразователей (АЦП) с усреднением кода.

В работе выясняется возможность создания отрицательной корреляции между отдельными преобразованиями в АЦП с автоматическим усреднением и определяется дисперсия среднего значения кода, когда преобразования коррелированы.

В качестве анализируемой системы рассмотрим несинхронизированный время-импульсный преобразователь с автоматическим цифровым усреднением кода (рис. 1). В такой системе временные интервалы, длительность которых τ нужно преобразовать в код, подаются на вход АЦП периодически с частотой F. Кодирование производится путем заполнения временных интервалов импульсами квантования высокой частоты f, создаваемых генератором заполнения ГЗ. Этот генератор начинает работать с поступлением сигнала «пуск» и прекращает по сигналу «стоп». Формирование сигнала «стоп», с помощью которого задается время усреднения, может производиться различными способами в зависимости от назначения системы. С выхода АЦП «пачки» импульсов подаются на сумматор (счетчик), на котором регистрируется среднее значение кода.

Для определения потенциальной возможности метода усреднения коррелированных преобразований примем, что за время усреднения длительность преобразуемых временных интервалов, частота их повторения, а также частота повторения импульсов квантования не меняются. Эти условия соответствуют идеализированному случаю, но позволяют получить достаточно простые расчетные соотношения.

В рассматриваемой системе сигнал «пуск» не синхронизирован с временными интервалами, поэтому момент начала любого интервала и совпадающий с ним момент начала отдельного преобразования равномерно распределены в границах периода повторения импульсов квантования τ_0.

С другой стороны, при периодическом повторении преобразований момент начала каждого последующего преобразования связан с моментами начала предыдущих жесткой функциональной зависимостью. Поэтому результаты усредняемых преобразований можно представить в виде системы случайных зависимых величин: $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots \ldots, X_j, \ldots, X_n$.

В этой системе при сделанных допущениях случайная величина X может принимать только два значения: N или $N+1$ импульсов. Обозначим вероятность второго исхода кодирования через p. Тогда, учитывая, что дисперсия не зависит от N, корреляционные моменты в (2) можно представить в виде равенства [4]

$$K_{ij} = K(X_i X_j) = P_{ij} - p^2, \tag{3}$$

где P_{ij} — совместная вероятность исходов $N+1$ импульсов в i-м и j-м преобразованиях. Из (3) получаем условие отрицательной корреляции $P_{ij} < p^2$.

Для определения совместной вероятности временной сдвиг начала отдельного преобразования относительно импульсов квантования Δt_i выразим в долях периода τ_0 и назовем его фазой преобразования

$$\psi_i = \frac{\Delta t_i}{\tau_0}; \quad 0 \leqslant \psi_i \leqslant 1. \tag{4}$$

Вероятность p в данном случае можно представить как отношение мер

$$p = \frac{\Delta \tau}{\tau_0}, \tag{5}$$

где $\Delta \tau = \tau - E\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)\tau_0$; $E(\ )$ — целая часть выражения, заключенного в скобки.

Из рис. 2 видно, что исход в i-м преобразовании определяется случайным значением фазы преобразования. Используя (4) и (5), запишем условие исхода $N+1$ импульсов

$$\psi_{i\,\min} = 1 - p \leqslant \psi_i \leqslant \psi_{i\,\max} = 1, \tag{6}$$

где $\psi_{i\,\min}$ и $\psi_{i\,\max}$ — пределы изменения фазы с этим исходом. Область значений фазы от $1 - p$ до 1 назовем диапазоном изменения фазы с исходом $N+1$ и обозначим ее через $\Delta \psi_i (N+1)$

$$\Delta \psi_i (N+1) = \psi_{i\,\max} - \psi_{i\,\min} = p.$$

Метод определения совместной вероятности поясним с помощью геометрической интерпретации вероятностей. Для этого изобразим область возможных значений фазы преобразования в виде окружности длиной, равной единице, и отметим на ней диапазон $\Delta\psi_i(N+1)$ (рис. 3).

По определению, совместная вероятность равна вероятности исхода $N+1$ в j-м преобразовании, вычисленной в предположении, что

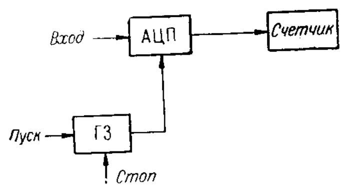

Рис. 1.

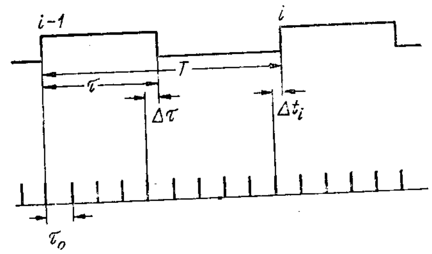

Рис. 2.

в i-м преобразовании был аналогичный исход. При таком предположении во всех преобразованиях диапазон изменения фазы равен p, только от преобразования к преобразованию он смещается по окружности.

Очевидно, что совместный исход $N+1$ импульсов в i-м и j-м преобразованиях возможен только тогда, когда диапазоны $\Delta\psi_i(N+1)$ и $\Delta\psi_{ij}$ перекрываются. Совместная вероятность равна величине этого перекрытия (дуга $\psi_{i\,\min}\psi_{ij\,\max}$). С другой стороны, длина этой дуги равна условному диапазону изменения фазы в j-м преобразовании с исходом $N+1$. Поэтому

$$P_{ij} = \Delta\psi_{ij}(N+1).$$

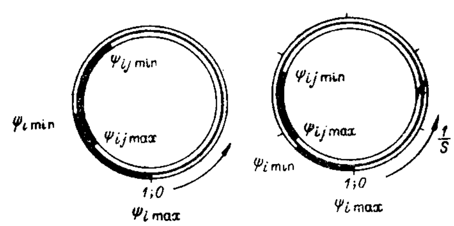

Рис. 3.

Для определения $\Delta\psi_{ij}(N+1)$ нужно знать условные пределы изменения фазы $\psi_{ij\,\min}$ и $\psi_{ij\,\max}$, рассчитанные в предположении выполнения условия (6). Тогда на основании анализа различных случаев соотношения между $\psi_{i\,\min}$, $\psi_{ij\,\min}$ и $\psi_{ij\,\max}$ можно записать

$$\Delta\psi_{ij}(N+1) = \Delta\psi'_{ij}(N+1) + \Delta\psi''_{ij}(N+1), \tag{7}$$

где $\Delta\psi'_{ij}(N+1) = \psi_{i\,\max} - \psi_{ij\,\min}$ при $\psi_{ij\,\min} \geqslant \psi_{i\,\min}$ и $\Delta\psi''_{ij}(N+1) = \psi_{ij\,\max} - \psi_{i\,\min}$ при $\psi_{ij\,\max} > \psi_{i\,\min}$.

В этом выражении величину ψ_{ij} можно рассматривать как фазовый сдвиг между колебаниями разных частот f и F, который является линейной функцией времени t

$$\psi_{ij} = \psi_i + (f - F)\,t.$$

Если текущее время выразить через частоту повторения временных интервалов и одновременно учесть, что фазовый сдвиг не может быть больше единицы, то получим

$$\psi_{ij} = d\left[\psi_i + (j - i)\,\frac{f}{F}\right], \tag{8}$$

где $d(\;)$ — дробная часть выражения, заключенного в скобки.

Используя равенства (6) — (8) и заменяя отношение частот равным ему отношением взаимно простых чисел k и s, получим расчетные соотношения для совместной вероятности

$$P_{ij} = P'_{ij} + P''_{ij}, \qquad (9)$$

где $P'_{ij} = p - d\left[(j-i)\frac{k}{s}\right]$ при $d\left[1 - p + (j-i)\frac{k}{s}\right] \geqslant 1 - p$ и $P''_{ij} = d\left[p + (j-i)\frac{k}{s}\right]$ при $d\left[(j-i)\frac{k}{s}\right] > 1 - p$. Если приведенные в (9) неравенства не выполняются, то частичные совместные вероятности P'_{ij} и P''_{ij} равны нулю. Введенная здесь величина s равна степени кратности частот. Она показывает, во сколько периодов частоты F укладывается целое число периодов частоты f.

Из полученных соотношений следует: во-первых, что при автоматическом усреднении результаты отдельных преобразований коррелированы независимо от соотношения частот f и F, во-вторых, что отрицательная корреляция возможна только при степени кратности частот больше единицы и, в-третьих, что совместная вероятность и, следовательно, корреляционные моменты являются периодическими функциями степени кратности s.

При периодическом повторении корреляционных моментов в случае, когда $n \gg s$, (2) можно упростить:

$$D(Y) = \frac{1}{s^2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} K(X_i X_j). \qquad (10)$$

В общем случае это равенство приближенное, но при n, кратном или равном s, оно становится точным.

Выражение (10) можно представить в виде матрицы. Матрица, в которой корреляционные моменты периодически повторяются, обладает тем свойством, что сумма корреляционных моментов во всех ее рядах одинакова и, следовательно,

$$D(Y) = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}(P_{1j} - p^2). \qquad (11)$$

Дальнейшее упрощение выражения для дисперсии среднего возможно только при введении некоторых ограничений. Предположим, что $p < \frac{1}{s}$. Из (9) следует, что дробная часть приведенных там соотношений может меняться только дискретно по отношению к величине $\frac{1}{s}$. Таким образом,

$$1 - \frac{1}{s} \geqslant d\left[(j-i)\frac{k}{s}\right] \geqslant \frac{1}{s},$$

и, следовательно, при $p < \frac{1}{s}$ условие существования P''_{ij} не выполняется ни при каких значениях i и j, а условие существования P'_{ij} выполняется только при $i=j$. На этом основании запишем

$$\sum_{j=1}^{s} P_{1j} = \sum_{j=1}^{s} P'_{1j} + \sum_{j=1}^{s} P''_{1j} = p.$$

К этому же выводу можно прийти, если воспользоваться геометрической интерпретацией вероятностей (см. рис. 3). Для этого нужно окружность разбить на s частей и отметить диапазоны изменения фазы во всех преобразованиях. Смещение диапазона от преобразования той вид

$$D(Y) = \frac{p}{s} - p^2. \tag{12}$$

Зависимость дисперсии от вероятности p в пределах $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{s}$ имеет форму, близкую к полуокружности с максимумом в точке $p = \frac{1}{2s}$. При $p=0$ и $p = \frac{1}{s}$ дисперсия равна нулю.

Если условие $p < \frac{1}{s}$ не выполняется, то сумма совместных вероятностей не равна p и выражение (11) становится недействительным. Однако следует ожидать, что характер зависимости дисперсии от вероятности исходов кода сохранится и значения дисперсии будут периодически повторяться.

Это предположение подтверждается проверкой по общим формулам (9) и (11) и рассчитанными по ним зависимостями $D(Y)=\varphi(p)$, приведенными на рис. 4. Так как функция $\varphi(p)$ периодическая, то выражение (12) можно распространить на все значения вероятностей от 0 до 1, если вместо p в него подставлять величину

$$p' = \frac{d(ps)}{s},$$

где $d(\quad)$ — дробная часть выражения, заключенного в скобки.

Все предыдущие выводы были сделаны в предположении, что n кратно s. Теперь дадим качественную оценку зависимости дисперсии среднего значения кода от соотношения между n и s. Как и прежде, ограничимся условием $p \leqslant \frac{1}{s}$. Тогда $K_{11}=D(X)$, $K_{12}=K_{13}= \ldots$ $\ldots = K_{1s} = -p^2$. Зная величины корреляционных моментов и представляя (2) в виде матрицы, получим:

$$D(Y) = \frac{D(X) - (n-1)p^2}{n} \quad \text{при } n \leqslant s; \tag{13}$$

$$D(Y) = \frac{[n + 2(n-s)]\, D(X) - [(n^2 - n) - 2(n-s)]\, p^2}{n^2} \quad \text{при } 2s \geqslant n \geqslant s. \tag{14}$$

Анализируя эти выражения, можно видеть, что в указанных пределах функция (13) с увеличением n монотонно убывает, а функция (14) имеет максимум. Следовательно, при n, кратном $s (n=s,\ n=2s, \ldots)$ дисперсия минимальна. Сделав подстановку, нетрудно убедиться, что дисперсия в точках минимумов одинакова.

При дальнейшем увеличении n эти минимумы будут повторяться. Первый минимум дисперсии кода соответствует наименьшему времени усреднения, поэтому режим усреднения, когда $n=s$, можно назвать оптимальным. Увеличение числа усредняемых преобразований свыше s при корреляционном усреднении не приводит к повышению точности преобразования.

На рис. 5 приведена зависимость $D(Y)=\varphi(p)$, рассчитанная для $p=\frac{1}{2s}$ и $s=5$. При отклонении числа усредняемых преобразований от оптимального в сторону уменьшения дисперсия среднего быстро возрастает и стремится к дисперсии однократного преобразования, с увеличением n дисперсия также возрастает, но незначительно.

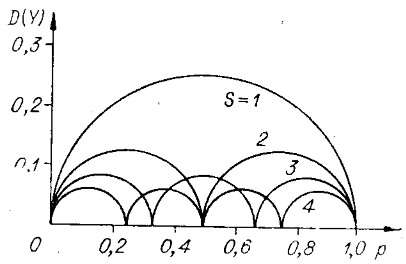

Рис. 4.

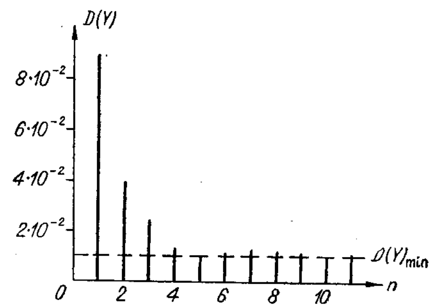

Рис. 5.

Выражение (12) позволяет определить дисперсию среднего при определенной величине кодируемых временных интервалов, когда известны вероятности исходов кодирования. Часто эти вероятности неизвестны и тогда длительность преобразуемых временных интервалов τ рассматривается как случайная величина с плотностью распределения $f(\tau)$.

В этом случае вероятность p является дробной частью случайной величины и дисперсия среднего $\overline{D}(Y)$ равна математическому ожиданию дисперсии $D(Y)$. При n, кратном s,

$$\overline{D}(Y)=\int_0^1 f(p)\,\varphi(p)\,dp,$$

где $f(p)$ — функция плотности распределения p, которая является равномерной при достаточно произвольных предположениях относительно плотности распределения случайной величины $f(\tau)$ [5].

Функция $\varphi(p)$ периодическая, поэтому достаточно произвести интегрирование в пределах от 0 до $\frac{1}{s}$. В результате получим

$$\overline{D}(Y)=\frac{1}{6s^2}.$$

Известно, что усредненное значение дисперсии кода несинхронизированных преобразователей в режиме однократного преобразования равно 1/6. Поэтому

$$\overline{D}(Y)=\frac{\overline{D}(X)}{s^2}. \tag{15}$$

При оптимальном корреляционном усреднении, когда $s=n$,

$$\overline{D}(Y)=\frac{\overline{D}(X)}{n^2}. \tag{16}$$

Сравнение (15) с (1) показывает, что при большом n и малом s $(s < \sqrt{n})$ корреляция приводит к увеличению дисперсии. Так, при $s=1$ дисперсия среднего равна дисперсии однократного преобразования. В связи с тем, что при корреляционном усреднении увеличение числа преобразований свыше s бесполезно, введение корреляции позволяет резко уменьшить время усреднения, причем выигрыш во времени получается больше (за исключением случая $s=1$), чем проигрыш по точности.

Максимальную точность преобразования метод корреляционного усреднения позволяет получить в режиме, близком к оптимальному. В этом случае при равном времени усреднения дисперсия среднего значения кода уменьшается в n раз по сравнению с дисперсией кода, определяемой (1) для независимых преобразований.

В заключение отметим, что при реализации метода корреляционного усреднения необходимая степень кратности может быть создана изменением, в небольших пределах, частоты f или F. Так, в фазометрах средних значений с промежуточным преобразованием фаза — длительность [3] можно изменять частоту f, так как показания фазометра не зависят от этой частоты. В вольтметрах средних значений с промежуточным преобразованием напряжения во временной интервал можно изменять частоту F.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Кнюпфер. Случайные погрешности синхронизированных и несинхронизированных аналого-цифровых преобразователей при одиночных измерениях.— Автометрия, 1967, № 2.
2. В. А. Валитов, Г. П. Вихров. Погрешности цифровых измерителей интервалов времени и повышение их точности методом усреднения.— Измерительная техника, 1963, № 4.
3. С. С. Кузнецкий. О законах распределения и практически предельных ошибках дискретного преобразования в цифровых фазометрах.— Автометрия, 1965, № 3.
4. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., «Наука», 1964.
5. П. А. Козуляев. О распределении дробной части случайной величины.— Математический сборник, новая серия, 1937, т. 2 (44), вып. 5.

Поступила в редакцию
22 марта 1967 г.,
окончательный вариант —
30 января 1968 г.