

Н. В. ЛИТВИНОВ  
(Новосибирск)

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ АЦП

Интерес к изучению динамики АЦП вызван в основном тем, что нередко возникает необходимость в измерении параметров быстропротекающих процессов. Так как создание АЦП, имеющих высокое быстродействие, не всегда возможно, то при таких измерениях приходится считаться с динамической погрешностью, поскольку ее значение быстро возрастает с увеличением скорости изменения измеряемого параметра и может оказаться одной из главных составляющих общей погрешности.

В опубликованных работах можно выделить два пути анализа динамики АЦП. Один из них состоит в том, что изучаются динамические погрешности, обусловленные наличием инерционных элементов и элементов чистой задержки в АЦП. Другой путь — изучение динамических свойств различных структур АЦП, при этом элементы АЦП считаются безынерционными и идеальными. Для каждого из двух путей характерна своя модель АЦП. Вкратце остановимся на этих моделях. Характерной работой первого пути является [1]. Предложенная в [1] модель состоит из идеального АЦП и некоторой приведенной линейной части. Предполагается, что идеальный АЦП имеет бесконечно малое время измерения и свободен от всех погрешностей, кроме погрешности дискретности. Появление динамической погрешности при этом определяется только линейной частью. Назовем эту модель линейной. Разновидностью линейной модели является модель, используемая в [2], имеющая в отличие от первой вместо линейной части элемент чистой задержки с временем задержки, равным времени измерения  $T_{и}$ . Такая модель АЦП в неявной форме используется многими авторами при выборе шага квантования по времени и расчете периодических режимов [3].

Общим основным недостатком моделей первого пути изучения динамики АЦП является то, что такая модель не позволяет учесть влияния структуры прибора на величину динамической погрешности. Поэтому этот путь не может дать ответа, например, на вопрос, какой из АЦП с одинаковым видом уравнивания, одинаковым временем измерения, но различными используемыми кодами имеет меньшую динамическую погрешность. Помимо этого, для линейной модели нет общего рецепта выделения линейной части, а разумное выделение ее представляет значительную трудность.

Второй путь изучения динамики основывается на представлении АЦП в виде конечного автомата, характеризующего алгоритмом функционирования или диаграммой состояний [4—7].

Идеализация для модели второго пути заключается в том, что элементы АЦП считаются стабильными и безынерционными (инерционность элементов частично учитывается выбором интервала времени между сравнениями). В такой модели невозможны колебательные и периодические процессы, обусловленные наличием инерционных звеньев, и динамическая погрешность полностью определяется алгоритмом функционирования АЦП (структурой АЦП) и параметрами измеряемой величины. Следовательно, второй путь в принципе позволяет дать ответ на поставленный выше вопрос о динамике АЦП с различными кодами. Работа [8] занимает промежуточное положение между рассмотренными двумя путями изучения динамики. С одной стороны, в ней используется линейная модель с элементом задержки, с другой стороны — время задержки переменное и определяется из диаграммы состояний, характеризующей АЦП как конечный автомат.

Ясно, что второй путь изучения динамики более перспективен, так как он позволяет решать более широкий круг задач. Но анализ динамики с моделью конечного автомата более сложен в математическом отношении. Даже для относительно простых АЦП, каковыми являются АЦП поразрядного уравнивания, вывод и сами аналитические выражения для статистических характеристик погрешности довольно сложны [7, 8]. К тому же полученные в этих работах формулы являются приближенными (рассмотрен случай малых значений производной измеряемого сигнала). Точное решение задачи нахождения статистических характеристик динамической погрешности наталкивается на ряд трудностей, связанных с вычислением двойных интегралов по областям сложного вида. Положение значительно усугубляется при анализе динамики АЦП последовательно-параллельного действия, находящихся в последнее время широкое применение [9]. Диаграммы состояний для них сложны и поэтому малоприменимы для графических способов исследования динамических погрешностей.

В связи с отмеченными выше трудностями для определения статистических характеристик АЦП предлагается воспользоваться методом Монте-Карло (методом статистических испытаний). Цель данной работы — рассмотреть возможность использования метода Монте-Карло для определения статистических характеристик АЦП и указать на некоторые задачи в теории АЦП, решаемые этим методом. Сущность метода Монте-Карло заключается в следующем. На ЭЦВМ создается математическая модель объекта исследования (в нашем случае алгоритм функционирования АЦП) и моделируется

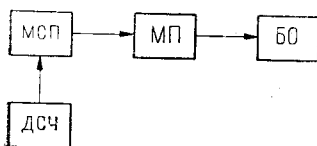


Рис. 1.

внешняя среда (измеряемый сигнал), воздействующая на этот объект. Многократно задавая случайным образом совокупность параметров внешней среды и следя за откликом объекта (выходной величиной модели) на внешнее воздействие, можно набирать статистику отклика объекта. Процесс получения одного случайного значения выходной величины объекта (в нашем случае результата «измерения») будем в дальнейшем называть испытанием. Схему исследования статистических характеристик АЦП можно представить в виде рис. 1, где приняты следующие обозначения: МСП — блок моделирования случайного процесса с заданными статистическими свойствами;

МП — математическая модель АЦП; БО — блок обработки (группа математических процедур, осуществляющих нахождение по полученным результатам измерений их некоторых статистических характеристик: закона распределения, дисперсии, математического ожидания и др.); ДСЧ — датчик случайных чисел с равномерным законом распределения.

В качестве поясняющего примера рассмотрим процесс нахождения закона распределения динамической погрешности прибора поразрядного уравнивания.

Модель АЦП в общем виде задается последовательностью операций, производимых над входным сигналом. В частных случаях моделью АЦП может являться функциональная связь выходной величины с входной. Для поразрядного АЦП, использующего двоичный код, последовательность операций задается рекуррентным соотношением

$$y(i) = y(i-1) + \frac{1}{2^i} \text{sign} \{x(i-1) - y(i-1)\}. \quad (1)$$

Датчик случайных чисел «выкидывает» число, по значению которого, следуя определенным правилам, находится текущее значение процесса. Затем текущее значение процесса подается на вход модели АЦП. Модель АЦП «измеряет», и результат измерения подается на вход БО. В БО определяется разность между результатом измерения и значением процесса в момент времени  $j$ , к которому относится этот результат, т. е. определяется динамическая ошибка

$$\delta = y - x(j),$$

где  $x(j)$  — значение измеряемого процесса в  $j$ -й момент времени. В зависимости от численного значения ошибки производится занесение единицы в ячейку памяти с условным номером, пропорциональным значению этой ошибки. Допустим, выбран массив ячеек памяти с условно принятыми номерами от  $-100$  до  $+100$  и получены ошибки  $\delta = 0,53$  и  $\delta = -0,72$ ; тогда в ячейку с номерами  $53$  и  $-72$  будет занесена  $1$  и вообще в  $i$ -ю ячейку заносится единица, если  $\delta = \frac{i}{100}$ . Таким образом, могут быть рассортированы ошибки от  $1$  до  $-1$  с шагом  $0,01$ .

В результате многократных испытаний ячейки массива будут содержать числа  $m(i)$ , равные числу раз получения ошибки  $\delta = \frac{i}{100}$ , т. е. числа  $\frac{m(i)}{N} = \gamma$  ( $N$  — число всех испытаний) представляют собой частоты событий  $\delta = \frac{i}{100}$ . Если  $N \rightarrow \infty$ , то  $\gamma$  стремится к вероятности данного события. Таким образом, может быть получен усредненный по шкале закон распределения динамической ошибки.

Автором были получены усредненные по шкале законы распределения динамической погрешности для АЦП поразрядного уравнивания, а также для АЦП параллельно-последовательного действия. АЦП поразрядного уравнивания был выбран в качестве объекта исследования с учетом того, что для него ранее был получен в [8] приближенный закон распределения и это могло служить грубой проверкой используемого метода. С другой стороны, при исследовании поразрядного АЦП рассматривался случай больших величин производной, что представляет самостоятельный интерес. Моделью измеряемого сигнала являлась последовательность значений моделируемой реализации случайного процесса с интервалом времени между значениями, равным времени измерения  $T_{\text{и}}$  (рис. 2). При этом считалось, что между двумя

соседними дискретными значениями процесса изменение  $x(t)$  происходит по линейному закону. Каждое значение процесса  $x(i)$  находилось исходя из формулы

$$x(i T_n) = x[(i-1) T_n] + \dot{x} T_n, \quad (2)$$

где  $\dot{x}$  — случайная величина, определяемая формулой

$$\dot{x} = \alpha \left( b - \frac{x[(i-1) T_n]}{B} \right), \quad (3)$$

где  $\alpha$  — коэффициент, определяющий максимальное изменение измеряемой величины за время измерения;  $b$  — случайная величина, распределенная равномерно в интервале  $(0,1)$ ;  $B$  — диапазон измерения АЦП.

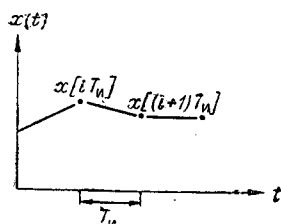


Рис. 2.

Особенность формулы для производной процесса (3) заключается в том, что значения процесса никогда не выходят за предел измерения. Когда значения процесса близки к пределу, то следующее приращение либо мало, либо меняет свой знак так, чтобы следующее значение процесса лежало дальше от границы. Построенный по данной схеме процесс подобен процессу блуждания частицы в среде с отражающими стенками.

На рис. 3, 4 приведены законы распределения значений процесса и его приращений ( $\alpha=25$ ;  $B=1024$ ). Значения процесса распределены по закону, достаточно близкому к нормальному, имеющему  $\sigma \approx 110 \div 120$  и математическое ожидание  $M(x) = 512$ . Закон распределения приращений процесса можно практически считать равномерным в интервале  $[-125, 125]$ . Усредненный по шкале закон распределения динамической погрешности

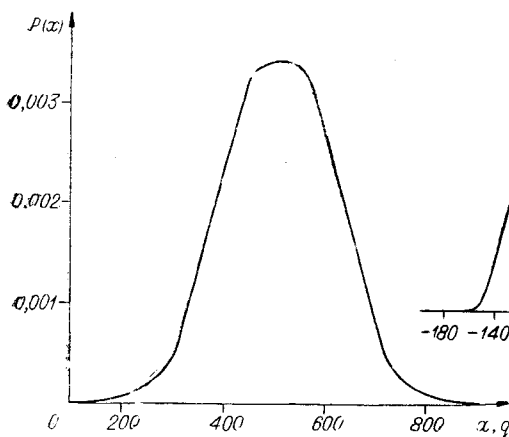


Рис. 3.

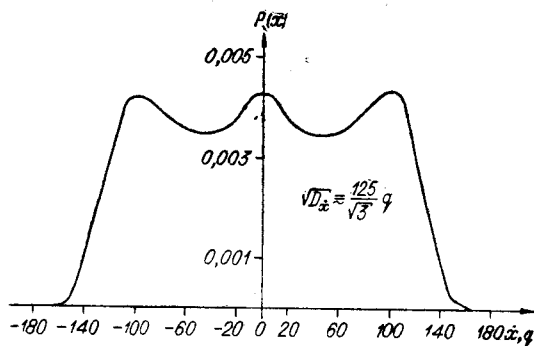


Рис. 4.

АЦП поразрядного уравнивания, имеющего 10 двоичных разрядов при вышеуказанном входном сигнале (см. рис. 3, 4), изображен на рис. 5. Кривые 1 и 2 соответствуют законам распределения погрешности при отнесении результата измерения к моменту предпоследнего и последнего сравнений. Поскольку дисперсия закона 1 меньше, чем дисперсия закона 2, то можно утверждать, что и в случае больших значений производной оптимальным является отнесение результата измерения к моменту предпоследнего сравнения. Следует заметить, что сделанные в [6] предположения о незначительности измерения коэффициента  $a$  в приближенной

формуле для дисперсии динамической погрешности в общем справедливо. Коэффициент  $a$  с ростом дисперсии приращения увеличивается значительно медленней, чем возрастает дисперсия приращений.

Схема моделирования случайного процесса при получении закона распределения динамической погрешности АЦП параллельно-последовательного действия была аналогична вышеизложенной ( $\alpha=1$ ;  $B=64$ ). Рассматривался АЦП, имеющий 6 двоичных разрядов.

Работа такого преобразователя более полно изложена в [10], здесь же лишь вкратце поясним принцип его действия. На рис. 6 приведена его блок-схема (для упрощения взято 4 разряда). В исходном состоянии  $i$ -е пороговое устройство (ПУ) имеет порог срабатывания, равный  $2^{4-i}$ . Измеряемая величина  $x$  подается одновременно на все ПУ. Срабатывание  $i$ -го ПУ вызывает изменение значений порога всех последующих ПУ путем замыкания  $i$ -го ключа (К) и подачи дополнительного смещения, численно равного  $2^{4-i}$ . Заметим, что в реальном АЦП тактового генератора нет. Последовательность действий ПУ определяется последовательностью моментов окончания переходных процессов в ПУ. Для упрощения описания в аналитическом виде алгоритма работы АЦП искусственно введем тактовый генератор. Идея введения искусственного такта та же, что и в [5, 6], т. е. исключить из рассмотрения процессы, связанные с наличием инерционных звеньев в цепях АЦП, и рассматривать лишь его структуру. Под тактом будем понимать одну операцию сравнения с набором значений порогов ПУ и последующее изменение значений порогов.

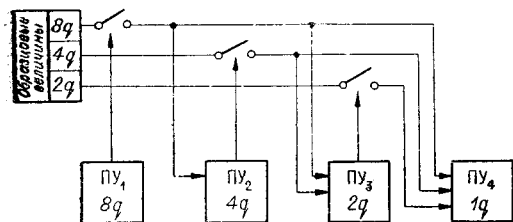


Рис. 6.

Результат измерения условно будем считать комбинацию состояний ПУ на каждом такте. Тогда результат измерения  $y$  на  $i$ -м такте запишем

$$y(i) = \sum_{j=1}^n \gamma_j^0 1 \{x(i) - \gamma_j(i-1)\}, \quad (4)$$

где  $\gamma_j^0$  — исходное значение порога  $j$ -го ПУ;  $x(i)$  — значение измеряемой величины на  $i$ -м такте;  $\gamma_j(i-1)$  — значение порога  $j$ -го ПУ на  $(i-1)$ -м такте.

Запишем значение порога  $j$ -го ПУ в произвольный момент  $i-1$ , т. е. на  $(i-1)$ -м такте

$$\gamma_j(i-1) = \gamma_j^0 + \sum_{k=1}^{j-1} \gamma_k^0 1 \{x(i-1) - \gamma_k(i-2)\}. \quad (5)$$

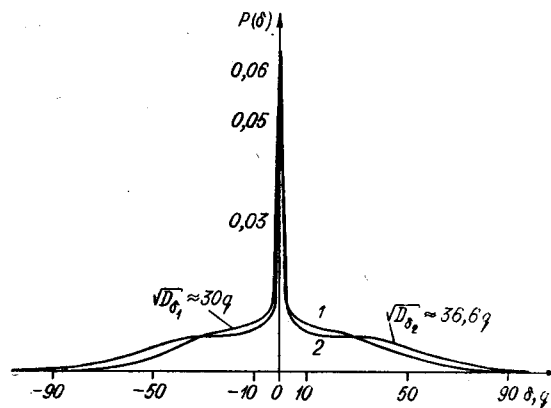


Рис. 5.

Результат измерения условно будем считать комбинацию состояний ПУ на каждом такте. Тогда результат измерения  $y$  на  $i$ -м такте запишем

Тогда (4) запишем в виде

$$y(i) = \sum_{j=1}^n \gamma_j^0 1 \{x(i) - \gamma_j^0 - \sum_{k=1}^{j-1} \gamma_k^0 1 \{x(i-1) - \gamma_k(i-2)\}\}.$$

Выражения (4), (5) позволяют просто составить программу для ЭЦВМ, имитирующую работу АЦП. Закон распределения динамической погрешности для АЦП параллельно-последовательного действия, имеющего 6 двоичных разрядов (результат измерения снимается через 6 тактов), представлен на рис. 7.

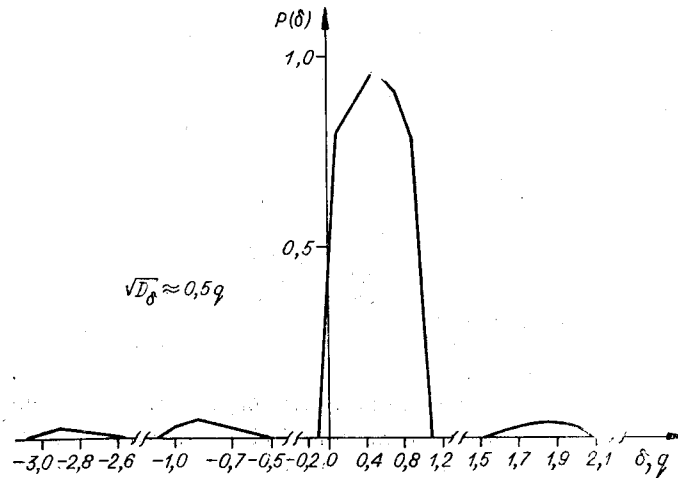


Рис. 7.

На рис. 7 изображена только область малых значений динамических ошибок. Значения плотности вероятности для больших величин ошибок удобнее свести в таблицу. Таблица и рис. 7 позволяют отметить две особенности динамических погрешностей таких АЦП.

		Отрицательные							
$\delta$ (в ед. $q$ )		-31	-30,9	-30,8	-30,7	-30,6 ÷ 7,1			
$P(\delta)$		$2,3 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	0			
		Положительные							
$\delta$ (в ед. $q$ )		3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0 ÷ 7,3	
$P(\delta)$		0	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$4,8 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	0

1. Имеется отличная от нуля вероятность появления ошибки в половину диапазона, даже если изменение измеряемой величины за время измерения значительно меньше половины диапазона (так, в исследуемом случае максимальное изменение за время измерения составляло менее 6).

2. Плотность вероятности динамической погрешности имеет гребенчатый вид. Ошибки величиной от 30 до 15  $q$ , от 16 до 7  $q$  и т. д. либо не возможны, либо их вероятность настолько мала, что 200 000 испытаний оказалось недостаточным для выявления этой закономерности.

Далее рассмотрим точность метода и круг задач в теории АЦП, решаемых методом Монте-Карло. Точность метода Монте-Карло рассмотрена в [11], здесь же приведем лишь формулы для оценки точности. Как известно [11], если моделируется событие  $A$ , наступающее с вероятностью  $P$  и в  $N$  испытаниях, событие  $A$  осуществилось  $L$  раз, то оценка вероятности  $P$  с помощью частоты  $\frac{L}{N}$  имеет вид

$$\frac{\delta}{P} \leq 3 \sqrt{\frac{1-P}{PN}}, \quad (6)$$

где  $\delta = \left| \frac{L}{N} - P \right|$  (достоверность оценки 0,997). Из (6) видно, что повышение точности на один порядок увеличивает число испытаний на два порядка.

Для того чтобы оценить возможные затраты машинного времени, удобно функционирование АЦП разбить на две группы операций: операции сравнения измеряемой величины с порогами набора устройств сравнения и операции изменения компенсационной величины либо значений порогов устройств сравнения. Тогда, если число устройств сравнения  $m$ , число разрядов результата измерения  $n$ ,  $k$  — число операций в группе изменения компенсационной величины, то общее число необходимых операций для одного испытания примерно равно  $mn + kn$ . Произведение  $mn$  берется потому, что если в реальных АЦП производится одновременное сравнение измеряемой величины с порогами набора устройств сравнения, то в модели АЦП на ЭЦВМ приходится эту операцию разбивать на  $m$  последовательных операций. Отсюда необходимое для решения задачи время  $T$  приближенно составляет

$$T \geq N(m+k)n\eta = \frac{9(1-P)}{Pd^2}(m+k)n\eta,$$

ВЕЛИЧИНЫ ОШИБОК

-6,9	-6,8	-6,7	-6,6	-6,5÷3,1
$5,6 \cdot 10^{-3}$	$9,5 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	0

ВЕЛИЧИНЫ ОШИБОК

7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	8,1÷31,4	31,5÷32
$10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$6,2 \cdot 10^{-3}$	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$5,8 \cdot 10^{-3}$	0	$\approx 3,3 \cdot 10^{-2}$

где  $\eta$  — среднее время выполнения ЭЦВМ одной операции;  $d = \frac{\delta}{P}$  — относительная ошибка полученного результата.

Круг задач, решаемых методом Монте-Карло, применительно к исследованию АЦП может быть достаточно широким. Моделируя

случайный измеряемый процесс и воздействуя им на вход модели, можно получить статистику динамической погрешности, статистику числа тактов уравнивания [12], т. е. закон распределения, средний квадрат, математическое ожидание. Подобным образом может быть исследована помехоустойчивость различных структур АЦП, а также определен вид кода, наиболее помехоустойчивого из ряда данных. Заметим, что задачи помехоустойчивости и динамики АЦП тесно связаны между собой. Так, в [12] исследуется влияние помех на результаты измерения при условии, что помехи при каждом акте сравнения действуют независимо. В [6—8], наоборот, считается, что помехи, действующие при всех операциях сравнения, — статистически связанные величины; причем эта связь такова, что на интервале времени измерения помеха изменяется линейно. Это два крайних случая. Промежуточный случай, когда связь не настолько сильная, чтобы считать действие помехи независимым, почти не изучен. Метод Монте-Карло позволяет частично решить и эту задачу. Другим типом задач, решаемых этим методом, является нахождение вероятностных характеристик АЦП, когда работа отдельных его частей носит случайный характер. К ним относится исследование надежности АЦП, влияния нестабильностей отдельных блоков АЦП, влияния случайного характера выполнения отдельных операций (внутренний шум).

К достоинствам метода Монте-Карло следует отнести и то, что при его использовании случайные сбои ЭЦВМ мало влияют на результат решения. Эта особенность позволяет решать задачи в течение времени, превышающего гарантированное время безошибочной работы ЭЦВМ.

В заключение автор выражает благодарность канд. техн. наук А. Н. Касперовичу за ценные замечания, сделанные при обсуждении данной статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. S. Friauf. Динамические характеристики аналого-цифровых преобразователей. — Экспресс-информация, КИТ, 1965, № 18.
2. Б. Г. Доступов. Некоторые вопросы точности преобразователей. Комбинированные вычислительные машины. М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. А. В. Балтрушевич, А. А. Косякин, Г. К. Круг. Динамика цифровых автоматических систем. — Труды МЭИ, вып. 44. Автоматика и телемеханика. М., 1962.
4. П. Е. Твердохлеб. Методика построения закона распределения погрешностей цифраторов, работающих в условиях импульсных помех. — Автометрия, 1965, № 5.
5. А. Н. Касперович, Н. В. Литвинов. К анализу динамических ошибок, возникающих при измерениях цифровыми измерительными приборами поразрядного уравнивания. — Автометрия, 1966, № 1.
6. А. Н. Касперович, Н. В. Литвинов. К вопросу о динамической ошибке цифрового прибора поразрядного уравнивания. — Автометрия, 1967, № 2.
7. В. М. Ефимов, В. И. Рабинович. О погрешности цифрового прибора, обусловленной изменением измеряемой величины за время измерения. — Автометрия, 1967, № 2.
8. Н. В. Литвинов. Способ получения приближенных статистических характеристик динамической погрешности АЦП развертывающего и поразрядного уравнивания. — IV научно-техническая конференция «Кибернетические пути совершенствования измерительной аппаратуры». Тезисы докладов и сообщений. Л., 1967.
9. К. Еулег. Новые принципы аналого-цифрового преобразования и их оптимальное практическое осуществление. — Экспресс-информация, КИТ, 1964, № 10.
10. В. А. Беломестных, А. Н. Касперович. Быстродействующий асинхронный аналого-цифровой преобразователь. — VI научно-техническая конференция «Кибернетические пути совершенствования измерительной аппаратуры». Тезисы докладов и сообщений. Л., 1967.
11. Н. П. Бусленко и др. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). М., Физматгиз, 1962.
12. Г. Г. Матушкин. Статистические характеристики измерительных приборов. — Автометрия, 1968, № 2.

Поступила в редакцию  
27 сентября 1968 г.