АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1969

УДК 681.2.08

С. М. ПЕРСИН
(Ленинград)

КВАНТОВАНИЕ ПО УРОВНЮ ПРИ ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

При разработке цифровых измерительных преобразователей и систем, особенно преобразователей с автоматической коррекцией систематической погрешности, необходим рациональный выбор способа и погрешности квантования по уровню.

Квантование при цифровых измерениях будем характеризовать шагом δ и начальной фазой α, определяющей положение шкалы квантующего устройства. Численно $\frac{\alpha}{\delta}$ равно значению дробной части отношения квантуемой величины к кванту δ, при котором происходит переход к следующему дискретному уровню $(0<\alpha\leqslant\delta)$.

Влияние квантования по уровню, в частности, на результат статистической обработки многократных измерений исследуется в ряде работ, в том числе в [1—7]. При этом основное внимание уделено двум важным частным случаям квантования: с фиксированной и равномерно распределенной начальной фазой. Ниже приводится анализ квантования по уровню при произвольном распределении начальной фазы α [5] и при изменении α по детерминированному закону. Последний случай может представлять существенный практический интерес. При анализе используется идеализированная модель квантования как безынерционного нелинейного преобразования суммы измеряемой величины X и случайной погрешности Y.

Квантование по уровню в общем случае приводит к смещению математического ожидания квантованной величины по отношению к измеряемой и тем самым ограничивает возможность повышения точности при осреднении результатов измерений. Полагая измеряемую величину постоянной и равной x, а случайные погрешности измерений некоррелированными, для начального момента второго порядка разности среднего арифметического n измерений и x можно записать

$$\sigma_1^2(x)=\frac{\sigma^2(x)}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)M^2(x), \qquad (1)$$

где $\sigma^2(x)$ и $M(x)$ — начальный момент второго порядка и математическое ожидание погрешности при значении измеряемой величины, равном x.

При квантовании со случайной фазой и случайной погрешностью Y, зависящей от измеряемой величины,

$$\sigma^2(x)=\sum_{i=1}^{N'}(i\delta-x)^2\int_0^{\delta}\omega(i\delta-\delta+t-x/x)\,dt, \tag{2}$$

где $\omega(\eta/x)=\int_0^{\delta}\xi(\alpha)\,\varphi(\eta+\alpha/x)\,d\alpha$; $\xi(\alpha)$ — плотность распределения начальной фазы α; $\varphi(y/x)$ — условная плотность распределения случайной погрешности при значении измеряемой величины, равном x; N' — число квантов шкалы прибора $\left(N'=\frac{L'}{\delta}\geqslant N=\frac{L}{\delta}\right.$; L — диапазон изменения измеряемой величины).

$$M(x)=\sum_{i=1}^{N'}\int_{i\delta}^{(i+1)\delta}\varphi(z-x/x)\{i\delta[1-F(z-i\delta)]+(i+1)\delta F(z-i\delta)\}\times$$

$$\times dz-x=\sum_{i=1}^{N'}\int_0^{\delta}\varphi(i\delta+t-x/x)[\delta F(t)-t]\,dt+\int_{L'}\varphi(z-x/x)\,dz-x, \tag{3}$$

где $F(\alpha)$ — интегральный закон распределения начальной фазы квантования α. Если пренебречь эффектом на краях шкалы, из (3) получим

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t-x/x)\,\psi(t)\,dt+M_y(x), \tag{4}$$

где $\psi(t)$ — периодическая функция с периодом, равным δ, совпадающая на интервале $0<t\leqslant\delta$ с функцией $\delta F(t)-t$; $M_y(x)$ — математическое ожидание погрешности Y при значении измеряемой величины, равном x. В дальнейшем для упрощения записи полагаем $M_y(x)=0$.

Выражение (4) позволяет определить $M(x)$ при известных законах распределения начальной фазы квантования и погрешности $\xi(\alpha)$ и $\varphi(y/x)$. Очевидно, при квантовании с равномерно распределенной начальной фазой $\psi(t)$ и $M(x)$ равны нулю (при $M_y(x)=0$).

Из (4) следует, что, если случайная погрешность Y не зависит от измеряемой величины, функция $M(x)$ является периодической с периодом δ и может быть представлена в виде ряда

$$M(x)=\frac{C_0}{\sqrt{2}}+\sum_{i=1}^{\infty}C_i\sin\left(i\frac{2\pi}{\delta}x+\gamma_i+\beta_i\right), \tag{5}$$

где
$$C_0=\frac{\sqrt{2}}{\delta}\int_0^{\delta}\psi(t)\,dt;$$

$$C_i=\sqrt{a_i^2+b_i^2}\ \sqrt{A_i^2+B_i^2};\quad \gamma_i=\operatorname{arctg}\frac{a_i}{b_i};\quad \beta_i=\operatorname{arctg}\frac{B_i}{A_i};$$

$$a_i=\frac{2}{\delta}\int_0^{\delta}\psi(t)\cos i\frac{2\pi}{\delta}t\,dt;\quad b_i=\frac{2}{\delta}\int_0^{\delta}\psi(t)\sin i\frac{2\pi}{\delta}t\,dt;$$

$$A_i=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\cos i\frac{2\pi}{\delta}t\,dt;\quad B_i=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\sin i\frac{2\pi}{\delta}t\,dt.$$

В частности, при квантовании с фиксированной начальной фазой $\alpha_к$

$$C_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\delta}{2} - \alpha_к\right), \quad C_i = \frac{\delta}{\pi i}\sqrt{A_i^2 + B_i^2}, \quad \gamma_i = -i\,\frac{2\pi}{\delta}\,\alpha_к,$$

что при $\alpha_к = \frac{\delta}{2}$ совпадает с результатами, полученными в [1, 6].

Наряду с (1) представляет интерес выражение для погрешности, полученное из (1) посредством интегрирования по всем возможным значениям x с учетом их вероятности. В частности, если случайная погрешность не зависит от измеряемой величины и если можно пренебречь краевым эффектом и изменением плотности распределения измеряемой величины $f(x)$ в пределах кванта, то подобное осреднение сводится к осреднению по кванту. При этом из (1), (2) и (5) при $M_y = 0$ получим

$$\sigma_1^2 = \int_L f(x)\,\sigma_1^2(x)\,dx = \frac{\sigma^2}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)M^2 \approx$$

$$\approx \frac{1}{n}\left[\sigma_y^2 + \frac{\delta^2}{3} + \int_0^{\delta}(\delta - 2\alpha)F(\alpha)\,d\alpha\right] + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{C_i^2}{2}, \qquad (6)$$

где σ_y^2 — дисперсия случайной погрешности.

Эффективным и достаточно простым методом уменьшения погрешности от влияния квантования по уровню при статистической обработке результатов измерений является изменение начальной фазы квантования от измерения к измерению по детерминированному закону. При подобном квантовании используется m фиксированных значений начальной фазы $\left(\alpha_j = j\,\frac{\delta}{m} - \frac{\delta}{2m};\ j = 1, 2, \ldots, m\right)$ и общее число осредняемых измерений n выбирается кратным m.

Закон изменения начальной фазы от измерения к измерению в принципе может быть различен при условии, что числа измерений с каждым из значений α_j равны между собой $\left(\text{равны } \frac{n}{m}\right)$. Практически (в частности, в силу изменения измеряемой величины за время осреднения) целесообразен перебор (например, последовательная смена) начальных фаз в каждой серии из m измерений.

При использовании рассматриваемого метода квантования для начального момента второго порядка разности среднего арифметического n измерений и измеряемого значения x можно записать

$$\sigma_2^2(x) = \left[\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} M(x, \alpha_j)\right]^2 + \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{m}\sigma_3^2(x, \alpha_j), \qquad (7)$$

где $M(x, \alpha_j)$ и $\sigma_3^2(x, \alpha_j)$ — математическое ожидание и дисперсия погрешности измерения величины x при квантовании с фазой α_j.

Разлагая $\psi(t)$ в ряд, из выражения (4) получим

$$M_1(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} M(x, \alpha_j) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t - x/x)\left\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left[\left(\frac{\delta}{2} - \alpha_j\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta}{\pi i}\sin\frac{i2\pi}{\delta}\left(t - j\,\frac{\delta}{m} + \frac{\delta}{2m}\right)\right]\right\}dt.$$

Несложно убедиться, что для всех $i \neq pm$, где p — целое число, суммирование по j дает результат, равный нулю. Таким образом,

$$M_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - x/x) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\delta}{\pi pm} \sin pm \frac{2\pi}{\delta}\left(t + \frac{\delta}{2m}\right) dt. \quad (8)$$

Сумма в (8) является разложением в ряд $\psi(t)$ при величине кванта, равной $\frac{\delta}{m}$, и фазе $\frac{\delta}{2m}$. Таким образом, выражение для $M_1(x)$ совпадает с выражением для $M(x)$ при квантовании с квантом $\delta' = \frac{\delta}{m}$ и фиксированной начальной фазой $\alpha' = \frac{\delta'}{2}$. В частности, при погрешности Y, не зависящей от X, функция $M_1(x)$ имеет период $\frac{\delta}{m}$. Очевидно, даже при малом m математическое ожидание погрешности результата осреднения существенно уменьшается.

Осредним выражение (7) по x. Из выражений (5) и (6) несложно убедиться, что при принятых допущениях дисперсия $\sigma_3^2 = \sigma^2 - M^2 \approx \approx \frac{1}{\delta} \int_{\delta} \sigma_3^2(x, \alpha_j)\, dx$ не зависит от значений α_j. Таким образом, выражение для σ_2^2 может быть представлено в виде

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma^2 - M^2}{n} + M_1^2 = \frac{1}{n}\left[\sigma_y + \frac{\delta^2}{12} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta^2 (A_i^2 + B_i^2)}{2\pi^2 i^2}\right] + + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta^2 (A_{im}^2 + B_{im}^2)}{2\pi^2 i^2 m^2} \quad (9)$$

В (9) σ и M соответствуют квантованию с квантом δ и фиксированной (произвольной) начальной фазой, а M_1 равно значению M при величине кванта $\delta' = \frac{\delta}{m}$ и фазе $\alpha' = \frac{\delta}{2m}$.

В частности, при равномерном (с плотностью $\frac{1}{a}$) и нормальном распределениях погрешности Y из (9) получим:

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{12n}\left[a^2 + \delta^2 - \left(\frac{\delta_1}{a}\right)^2 (\delta - \delta_1)^2\right] + \frac{1}{12}\left(\frac{\delta_2}{a}\right)^2 \left(\frac{\delta}{m} - \delta_2\right)^2 \quad (9')$$

и

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\left[\sigma_y^2 + \frac{\delta^2}{12} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\delta}{\pi i}\right)^2 e^{-\left(\frac{\sqrt{2}\pi i \sigma_y}{\delta}\right)^2}\right] + + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\delta}{\sqrt{2}\pi m i}\right)^2 e^{-\left(\frac{\sqrt{2}\pi m i \sigma_y}{\delta}\right)^2}, \quad (9'')$$

где $a = d_1\delta + \delta_1$; $a = d_2\frac{\delta}{m} + \delta_2$; d_1 и d_2 — целые числа; $0 \leqslant \delta_1 < \delta$; $0 \leqslant \delta_2 < \frac{\delta}{m}$. На рис. 1, *а* приведена зависимость M от x (l — произведение δ на дробную часть отношения $x + \frac{a}{2} - \frac{\delta}{2}/\delta$) при равномерном распределении Y и $\alpha = \frac{\delta}{2}$, а на рис. 1, *б* — зависимость $h = \frac{\delta_1(\delta - \delta_1)}{a}$ от a. Максимальные значения h, равные $\delta\left[1 - 2 \times \times \left(\sqrt{d_1^2 + d_1} - d_1\right)\right]$, имеют место при $a = \delta\sqrt{d_1^2 + d_1}$, при $a = d_1\delta$ $M(x) = 0$. Зависимость $M_1(x)$ аналогична, но δ заменяется на $\frac{\delta}{m}$, δ_1 на δ_2 и d_1 на d_2.

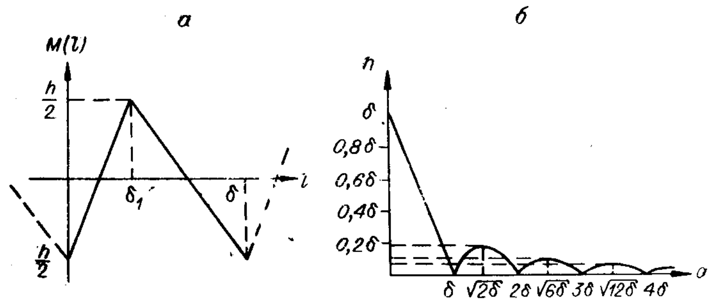

Рис. 1.

На рис. 2 показан характер зависимостей дисперсий σ_1^2 и σ_2^2 от числа осредняемых измерений (плавные кривые, проведенные через дискретные точки) для случаев квантования с фиксированной $\left(\alpha = \frac{\delta}{2}\right)$, равномерно распределенной и меняющейся по детерминированному закону начальной фазой (I, II и III). Величины n_2 и n_1 существенно зависят от распределения случайной погрешности и соотношения σ_y и δ, при этом n_2 много больше n_1. Например, при равномерном распределении погрешности, если $\delta_1 = 0{,}5\delta$, $n_1 = 4(2d_1 + 1)^2 + 1$ (5, 37, 101 и т. д.), а n_2 (при m нечетном) в m^4 раз больше.

Сопоставление различных способов квантования показывает, что при квантовании с фиксированной фазой (в отличие от квантования с равномерно распределенной фазой) величину кванта следует брать тем меньшей, чем больше n и диапазон возможного изменения σ_y, поскольку при больших n погрешность результата осреднения может существенно возрастать с уменьшением σ_y (в ряде случаев используется даже введение дополнительной помехи). Квантование с изменением фазы по определенному закону может быть наиболее эффективным. Рациональным выбором m смещение M_1 может быть уменьшено до необходимого значения, а дисперсия погрешности $\sigma^2 - M^2$ (особенно при малом по сравнению с квантом значении σ_y) может быть значительно меньше, чем при квантовании с равномерно распределенной фазой. Например, при равномерном распределении погрешности и $a < \delta$ дисперсия погрешности для двух указанных случаев, как это видно из (9), равна $\frac{a\delta}{6}$ и $\frac{a^2}{12} + \frac{\delta^2}{6}$, т. е. с увеличением δ растет в первом случае по линейному, а во втором — по квадратичному закону. При весьма малой (по сравнению с квантом) величине σ_y при осреднении m измерений погрешность дискретности при квантовании с детерминированным изменением начальной фазы уменьшается в m раз и при одинаковой величине кванта в $\sqrt{2m}$ раз меньше, чем во втором случае. Использование квантования с детерминированным изменением фазы в ряде случаев позволяет резко увеличить квант δ и повысить точность и быстродействие измерительной системы (особенно при использовании метода последовательного счета или при осреднении приращений).

Техническая реализация подобного квантования при цифровом

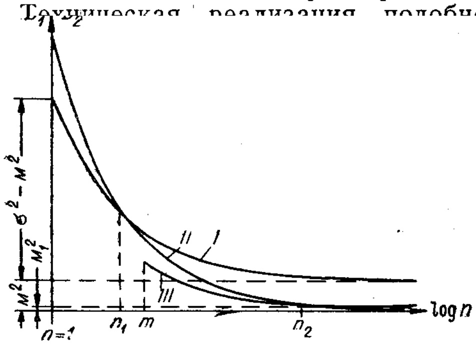

Рис. 2.

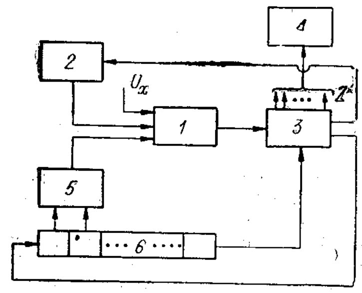

Рис. 3.

схема управления; *4* — сумматор результатов измерений Z; *5* — преобразователь кода в напряжение; *6* — счетчик числа осредняемых измерений. В приведенной схеме задание и смена начальных фаз α_j осуществляется преобразователем кода в напряжение *5*, управляемым триггерами младших разрядов счетчика *6*. На рис. 3 условно используются два младших разряда ($m=4$). Подобная схема может быть применена независимо от метода преобразования. Различие будет лишь в некоторых особенностях ее технической реализации (например, если схема *2* представляет собой преобразователь код — напряжение, преобразователи *2* и *5* могут быть объединены, вместо сумматора *4* в ряде случаев может быть использован счетчик и т. д.). Очевидно, такая схема, если учесть уменьшение числа разрядов в аналого-цифровом преобразователе и в сумматоре *4* (увеличение δ), может быть даже проще обычной. Пример технической реализации квантования с детерминированным изменением начальной фазы при измерении малых временных интервалов рассмотрен в [8].

Следует отметить, что наряду с квантованием с детерминированным изменением начальной фазы может быть дополнительно использовано, например, случайное смещение серий из m измерений (с различными фазами α_j) в пределах $\frac{\delta}{m}$. При равномерном распределении этого смещения $M_1(x)=0$. Это может быть полезно, например, для уменьшения необходимого значения m (при существенных колебаниях σ_y).

Предельным случаем квантования с детерминированным изменением начальной фазы является выбор δ равным L (либо при осреднении приращений — диапазону изменения приращений L_1), а числа m фаз α_j — равным $N(N_1)$. Техническая реализация подобного алгоритма работы измерительного устройства следует из рис. 3.

Полученные в работе результаты могут быть использованы для оценки погрешностей цифровых измерений и для рационального выбора способа квантования, числа разрядов преобразователя и числа осредняемых измерений. Следует отметить, что нередко рассматриваемые зависимости (например, σ_1 или σ_2 от δ) при заданных условиях и ограничениях (необходимой степени уменьшения погрешности, допустимой затрате времени на измерения, объеме аппаратуры, например, емкости регистра осреднения и т. д.). имеют оптимум.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Дунин-Барковский, И. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М., Гостехиздат, 1955.
2. А. С. Немировский. Вероятностные методы в измерительной технике. М., Изд-во стандартов, 1964.
3. М. Л. Езерский, А. М. Куперман. О выборе шага квантования по уровню и по времени при цифровом осреднении.— Автометрия, 1967, № 4.
4. М. А. Земельман, А. П. Кнюпфер, В. А. Куликов. Определение статистических характеристик измеряемых величин при малых дисперсиях по выходным сигналам аналого-цифровых преобразователей.— Автометрия, 1966, № 2.
5. С. М. Персин. Исследование некоторых методов повышения точности цифровых измерительных систем. Автореф. канд. дисс. Л., 1966.
6. В. М. Ефимов. Ошибки квантования по уровню при цифровых измерениях.— Автометрия, 1967, № 6.
7. И. М. Шенброт. О методической ошибке цифрового измерения случайного процесса.— Автометрия, 1968, № 2.
8. L. B. Harris. Random Time-Modulation of the Main Band for Increased Accuracy in Digital Range Measurement.— IRE Trans. Aeron. and Navig. Electronics, 1956, v. 3, № 2.

Поступила в редакцию
9 января 1968 г.,
окончательный вариант —
6 сентября 1968 г.