А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 2 1969

УДК 621.3.088+681.142.621

Г. И. САЛОВ
(Новосибирск)

ОБ ОЦЕНКЕ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ МНОЖЕСТВОМ РЕЛЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СО СЛУЧАЙНЫМ ПОРОГОМ СРАБАТЫВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ МЕШАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ, ч. 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как известно, в процессе измерения с применением множества релейных элементов (метод совпадения) источником систематической погрешности измерения является помимо неточности установки значений порогов срабатывания элементов нестабильность порогов, обусловленная влиянием изменений параметров окружающей среды, например температуры. Даже весьма тщательное применение методов компенсации, хотя и сопряжено с большими трудностями, не дает достаточно полного устранения нестабильности значений порогов срабатывания элементов. В статье [1] рассматривается повышение точности измерения метода совпадения путем увеличения числа релейных элементов, но при этом не учитывается влияние изменений параметров окружающей среды, что может быть справедливо, например, при достаточном термостатировании элементов или в случае, когда температура известна.

Вместе с тем можно ожидать, что применение в процессе измерения релейных элементов с разной чувствительностью к изменениям параметров окружающей среды позволит увеличить точность измерения, не прибегая в пределах возможного к специальным дополнительным приемам.

Цель настоящей работы — теоретическая оценка значения измеряемой величины, когда множество релейных элементов состоит из двух частей (подмножеств), отличающихся названной выше чувствительностью.

Пусть t — параметр, влияющий на порог срабатывания элементов, а t_0 — среднее значение этого параметра. Предполагается, что все элементы каждого подмножества изготавливаются в одинаковых условиях, а пороги срабатывания их настраиваются при $t=t_0$ с одинаковой (статистически) точностью на одно и то же требуемое значение m и представляют собой сумму m, флуктуаций и случайных погрешностей настройки, причем каждая из последних независима от других. Тогда с точки зрения теории вероятностей пороги срабатывания элементов каждого подмножества являются взаимно независимыми случайными величинами с одной и той же функцией распределения вероятностей. Обозначим порог срабатывания при $t=t_0$ через ζ_{10} для элемента первого подмножества и через ζ_{20} — для второго. Функцию распределения его обозначим через $G_1(x)$ и $G_2(x)$ соответственно. Так как $G_1(x)$ и $G_2(x)$ обычно определяются экспериментально при наличии флуктуаций порогов срабатывания, независимых от элемента к элементу, то, считая для простоты последние (статистически) одинаковыми, естественно предположить, что в $G_1(x)$ и $G_2(x)$ учитываются и флуктуации порогов. Пусть теперь γ_1 и γ_2 — приращения значения порога срабатывания для элемента соответственно первого и второго подмножеств, вызванные приращением значения t на единицу. Ввиду множества факторов, от которых зависит γ_1 (соответственно γ_2), нельзя ожидать, что γ_1 (соответственно γ_2) будет одним и тем же для всех элементов первого (соответственно второго) подмножества. Если элементы каждого подмножества изготавливались, как отмечалось выше, в одинаковых условиях, то γ_1 и γ_2 можно считать случайными величинами. Когда γ_1 и γ_2 не зависят от значения порога (что, впрочем, не необходимо для рассматриваемой задачи), порог срабатывания для всякого t определяется посредством

$$\zeta_i = \zeta_{i0} + \gamma_i (t - t_0) = \zeta_{i0} + \gamma_i \beta \quad (i = 1, 2).$$

Тогда функция распределения $G_1(x, \beta)$ [соответственно $G_2(x, \beta)$] случайной величины ζ_1 (соответственно ζ_2) является композицией функций распределения ζ_{10} и $\beta\gamma_1$ (соответственно ζ_{20} и $\beta\gamma_2$).

Задачу сформулируем следующим образом. Имеем множество из n_1+n_2 релейных элементов, не влияющих на работу друг друга. Пороги срабатывания элементов первого (соответственно второго) подмножества являются независимыми случайными величинами с одной и той же известной функцией распределения вероятностей $G_1(x, \beta)$ [соответственно $G_2(x, \beta)$], зависящей от (неизвестного) параметра β. Иными словами, для порога срабатывания каждого элемента подмножества справедливо

$$P\{\zeta_i \leqslant x \mid \beta = y\} = G_i(x, \beta) \quad (i = 1, 2).$$

Измерительный процесс заключается в том, что одновременно на все элементы воздействует неизвестная величина α, в результате чего элементы, имеющие значение порога меньше или равное α, срабатывают. Необходимо найти оценку для α (что и является задачей измерения α) как функцию от числа сработавших элементов в подмножествах $G_1(x, \beta)$ и $G_2(x, \beta)$ и определить точность этой оценки. Неизвестный параметр β нас не интересует. Однако, поскольку он входит в функции распределения, его необходимо принимать во внимание. Такой параметр часто называют мешающим параметром данной задачи. При рассмотрении поставленной задачи мы будем следовать линии изложения статьи [1].

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АПОСТЕРИОРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ α

Так как пороги срабатывания элементов являются независимыми случайными величинами, то вероятность того, что в первом подмножестве сработают k_1 определенных элементов из общего числа n_1, а во втором — k_2 из n_2, очевидно, равна

$$\prod_{i=1}^{2} [G_i(\alpha, \beta)]^{k_i} [1 - G_i(\alpha, \beta)]^{n_i - k_i} = L(k_1, k_2; \alpha, \beta). \qquad (1)$$

Обозначим число сработавших элементов в первом подмножестве через η_1, а во втором — через η_2. Так как количество различных комбинаций по k элементов из общего числа n равно C_n^k, следовательно, вероятность того, что в первом (соответственно во втором) подмножестве сработают k_1 (соответственно k_2) каких-либо элементов, имеет вид

$$P\{\eta_1 = k_1, \eta_2 = k_2 \,|\alpha, \beta\} = \prod_{i=1}^{2} C_{n_i}^{k_i} [G_i(\alpha, \beta)]^{k_i} \times$$
$$\times [1 - G_i(\alpha, \beta)]^{n_i - k_i} = p(k_1, k_2; \alpha, \beta), \tag{2}$$

где $k_i = 0, 1, \ldots, n_i$.

Оценка для неизвестного значения α (обозначим ее через α^*) должна быть некоторой определенной функцией от η_1 и η_2 и является, таким образом, случайной величиной. Следовательно, никак нельзя предсказать значение оценки в каждом отдельном случае конкретных элементов. Поэтому естественно рассматривать оценку не по индивидуальным ее значениям, а статистически, т. е. по распределению последней. При конструировании оценки $\alpha^* = v(\eta_1, \eta_2)$ важно, чтобы ее распределение было сконцентрировано, как это только возможно, около значения α.

Сначала рассмотрим случай, когда априорные сведения об α и β позволяют экспериментатору считать их независимыми случайными величинами с известными ему функциями распределения вероятностей $F_1(x)$ и $F_2(y)$ соответственно. Результаты с небольшими изменениями остаются справедливыми, если α и β — зависимые величины. Для нахождения оценки в данном случае обычно используют апостериорное распределение α, или, говоря иначе, условное распределение α при условии, что $\eta_1 = k_1$, $\eta_2 = k_2$, где k_1 и k_2 — наблюденные числа сработавших элементов в подмножествах. Условное распределение α при условии $\eta_1 = k_1$, $\eta_2 = k_2$ равно

$$F(x/k_1, k_2) = P\{\alpha \leqslant x | \eta_1 = k_1, \eta_2 = k_2\} =$$
$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(k_1, k_2; u, y)\, dF_2(y)\, dF_1(u)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(k_1, k_2; u, y)\, dF_2(y)\, dF_1(u)}. \tag{3}$$

Часто разумным критерием точности оценки вида $v(\eta_1, \eta_2)$ значения α является математическое ожидание квадрата ошибки

$$E[v(\eta_1, \eta_2) - \alpha]^2 = E\{E[(v(\eta_1, \eta_2) - \alpha)^2 | \alpha = x, \beta = y]\} =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} (v(k_1, k_2) - x)^2 p(k_1, k_2; x, y)\, dF_2(y)\, dF_1(x) =$$
$$= \sum_{k_1} \sum_{k_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (v(k_1, k_2) - x)^2 p(k_1, k_2; x, y)\, dF_2(y)\, dF_1(x).$$

Можно показать, что это выражение обращается в минимум при функции $v(k_1, k_2)$, равной математическому ожиданию распределения (3), причем минимум этот равен

$$\sum_{k_1} \sum_{k_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(k_1, k_2; x, y)\, dF_2(y)\, dF_1(x) -$$

$$-\frac{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, p(k_1, k_2; x, y)\, d F_2(y)\, d F_1(x)\right]^2}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(k_1, k_2; x, y)\, d F_2(y)\, d F_1(x)}.$$

Как видно, последняя формула слишком сложна, чтобы с ее помощью исследовать точность оценки в зависимости от вида $G_1(x, \beta)$ и $G_2(x, \beta)$.

Рассмотренный метод дает наилучшую оценку, когда $F_1(x)$ и $F_2(y)$ известны. Но чаще всего бывает, что $F_1(x)$ и $F_2(y)$ неизвестны. Кроме того, α и β даже могут не быть случайными величинами.

МЕТОД МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ

Теперь будем считать α и β переменными величинами в смысле обычного анализа, т. е. будем иметь в виду только то, что значения α и β могут быть любыми из некоторого множества.

Важнейшим методом построения оценок является метод максимума правдоподобия. В данном случае, когда известно, что $\eta_1=k_1$ и $\eta_2=k_2$, оценки максимального правдоподобия получаем при совместном решении уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\log p(k_1, k_2; \alpha, \beta) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\log p(k_1, k_2; \alpha, \beta) = 0,$$

отбрасывая все корни вида $\alpha, \beta=\text{const}$. Дифференцирование приводит к уравнениям:

$$[k_1 - n_1 G_1(\alpha, \beta)][1 - G_2(\alpha, \beta)] G_2(\alpha, \beta)\frac{\partial G_1(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} +$$

$$+ [k_2 - n_2 G_2(\alpha, \beta)][1 - G_1(\alpha, \beta)] G_1(\alpha, \beta)\frac{\partial G_2(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0;$$

$$[k_1 - n_1 G_1(\alpha, \beta)][1 - G_2(\alpha, \beta)] G_2(\alpha, \beta)\frac{\partial G_1(\alpha, \beta)}{\partial \beta} +$$

$$+ [k_2 - n_2 G_2(\alpha, \beta)][1 - G_1(\alpha, \beta)] G_1(\alpha, \beta)\frac{\partial G_2(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0.$$

Относительно $k_1 - n_1 G_1(\alpha, \beta)$ и $k_2 - n_2 G_2(\alpha, \beta)$ полученная система уравнений правдоподобия линейная. Поэтому, если для всякой пары α и β, принадлежащей множеству Ω, на котором

$$0 < G_i(\alpha, \beta) < 1 \quad (i = 1, 2),$$

имеет место

$$\frac{\partial G_1(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}\frac{\partial G_2(\alpha, \beta)}{\partial \beta} - \frac{\partial G_1(\alpha, \beta)}{\partial \beta}\frac{\partial G_2(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \neq 0, \qquad \text{(I)}$$

то в качестве оценок α^* и β^* принимается решение системы

$$n_1 G_1(\alpha, \beta) - k_1 = 0; \quad n_2 G_2(\alpha, \beta) - k_2 = 0, \qquad (4)$$

и не существует других корней уравнений правдоподобия.

Точность найденной таким методом оценки α^* значения α может быть охарактеризована величиной двух первых моментов ее ошибки.

Чтобы изучить возможности рассматриваемого множества релейных элементов и оценку максимума правдоподобия с точки зрения технических приложений, необходимо конкретизировать функции распределения $G_1(x, \beta)$ и $G_2(x, \beta)$.

ПЕРВЫЙ ПРИМЕР

Вначале остановимся на простом примере, который может быть реализован и, по-видимому, представляет определенный интерес. Однако здесь необходимо наложить дополнительные ограничения. Допустим, что дисперсия флуктуаций порогов срабатывания элементов пренебрежимо мала по сравнению с дисперсией погрешности установки последних, а математические ожидания c_1 и c_2 случайных величин γ_1 и γ_2 соответственно доминируют над дисперсиями последних. Если согласиться на отбор тех элементов из числа изготовленных для каждого подмножества, значения порогов которых принадлежат [1] при $t=t_0$ интервалу $(m-h,\ m+h)$, где функции распределения вероятностей порогов срабатывания изготовленных элементов не сильно отличаются от линейных функций, то будем иметь в качестве первого приближения наиболее простые распределения:

$$G_i(x,\beta)=\begin{cases}0 & \text{при } x_i<m+\beta c_i-h;\\ \dfrac{x-m-\beta c_i+h}{2h} & \text{при } m+\beta c_i-h<x\leqslant m+\beta c_i+h;\\ 1 & \text{при } x>m+\beta c_i+h \quad (i=1,\ 2).\end{cases} \tag{5}$$

Мы не будем в настоящей работе рассматривать вопрос о погрешности, которая возникает при замене истинных распределений равномерными. Несомненно, на практике имеются случаи, для которых распределение отобранных элементов будет настолько близким к равномерному, что, пользуясь последним, об исследуемом множестве элементов можно делать состоятельные выводы.

Если $c_1\neq c_2$ (условие (I) выполняется), то решение системы уравнений (4) для распределений (5) дает оценку

$$\alpha^*=v\,(k_1 k_2)=\frac{2h}{c_1-c_2}\left(c_1\frac{k_2}{n_2}-c_2\frac{k_1}{k_1}\right)+m-h. \tag{6}$$

С помощью прямого вычисления, используя выражение для математического ожидания биномиального распределения, легко убедиться в том, что оценка (6) является несмещенной в среднем

$$E\,(\alpha^*)=m_1=\sum_{k_1}\sum_{k_2}v\,(k_1,k_2)\,p\,(k_1,k_2;\ \alpha,\beta)=$$

$$=\frac{2h}{c_1-c_2}\,[c_1 G_2(\alpha,\beta)-c_2 G_1(\alpha,\beta)]+m-h=\alpha.$$

Отсюда, очевидно, не следует, что для каждой отдельной реализации множества элементов результаты измерений (оценки) α обязательно не будут иметь систематической ошибки (смещения). Для рассматриваемого метода измерения систематическая ошибка является случайной величиной. Полученная несмещенность означает только то, что оценка (6) для метода в среднем не имеет систематической ошибки. Однако, как это будет видно ниже, увеличение числа релейных элементов понижает среднеквадратическое значение суммарной ошибки оценивания α. Поэтому, согласно равенству Чебышева, и для отдельной реализации множества элементов практически можно рассчитывать на то, что ошибка однократного измерения не превысит некоторого желаемого уровня.

Математическое ожидание квадрата ошибки оценки (6) равно дисперсии последней и представимо в виде

$$E(\alpha^* - \alpha)^2 = \sigma_1^2(\alpha, \beta; n_1, n_2; c_1, c_2) = \sum_{k_1}\sum_{k_2} v^2(k_1, k_2)\, p(k_1 k_2; \alpha, \beta) - \alpha^2 =$$

$$= \frac{4h^2}{(c_1 - c_2)^2}\left\{\frac{c_1^2}{n_2} G_2(\alpha, \beta)\,[1 - G_2(\alpha, \beta)] + \frac{c_2^2}{n_1} G_1(\alpha, \beta)\,[1 - G_1(\alpha, \beta)]\right\}. \quad (7)$$

Необходимо отметить, что не существует другой оценки α_0^*, для которой $E(\alpha_0^* - \alpha)^2$ было бы меньше (7). Это всегда имеет место, когда оценки для неизвестных параметров α и β совместноэффективные [2]. Совместная эффективность оценок (6) и β^*, второй компоненты решения системы (4), показана в приложении.

Выражение (7) зависит от неизвестных α и β. Не представляет больших трудностей показать, что при $\alpha = m$, $\beta = 0$ оно принимает наибольшее значение, равное

$$\max_{(\alpha, \beta) \in \Omega} \sigma_1(\sigma, \beta; n_1, n_2; c_1, c_2) = \frac{h^2}{(c_1 - c_2)^2}\left(\frac{c_1^2}{n_2} + \frac{c_2^2}{n_1}\right). \quad (8)$$

Естественно поставить вопрос о том, как при условии $n_1 + n_2 = n = \text{const}$ должно быть выбрано, например, n_1, чтобы при этом так минимизировать (8), как это только возможно для данных c_1 и c_2. Исследуя правую часть (8) на минимум, легко получить обычным путем наименьшее значение ее при

$$n_1 = n\,\frac{c_2^2 - |c_1 c_2|}{c_2^2 - c_1^2}, \quad (9)$$

приводимое к виду

$$\min_{n_1 + n_2 = n}\left[\max_{(\alpha, \beta) \in \Omega} \sigma_1^2(\alpha, \beta; n_1 n_2; c_1, c_2)\right] = \frac{h^2(|c_1| + |c_2|)^2}{n(c_1 - c_2)^2}.$$

Ясно, что $(c_1 - c_2)^2 \leqslant (|c_1| + |c_2|)^2$ и знак равенства имеет место только тогда, когда у c_1 и c_2 разные знаки. Таким образом, обнаружено, что, когда c_1 и c_2 имеют разные знаки, а n_1 выбрано согласно (9), наибольшее значение математического ожидания квадрата ошибки оценки (6) равно $\max\limits_{(\alpha, \beta) \in \Omega} E(\alpha^* - \alpha)^2 = \frac{h^2}{n}$, т. е. такое же, как и в случае с тем же числом релейных элементов, но без неизвестного мешающего параметра β [1].

Рассмотрение этого примера приводит к следующим выводам.

При равномерном распределении вероятностей порогов срабатывания релейных элементов применение релейных элементов двух разных чувствительностей к мешающему воздействию позволяет существенно уменьшить влияние последнего на точность оценки измеряемой величины.

Коэффициенты чувствительности к мешающему воздействию и соответствующие им числа релейных элементов имеют оптимальные значения, при которых наибольшее среднеквадратическое значение ошибки такое же, как и в случае с отсутствием неизвестного мешающего параметра.

Оценки максимального правдоподобия для рассмотренного примера являются совместноэффективными.

Нужно отметить, что существование совместноэффективных оценок — довольно большая редкость. Однако во второй части работы будет показано, что если в добавление к условию (I) функции распределения $G_1(x, \beta)$ и $G_2(x, \beta)$ имеют непрерывные частные производные, то для всякой пары α и β, принадлежащей Ω, оценки максимального правдоподобия являются совместноэффективными в асимптотическом смысле при больших числах n_1 и n_2. Там же будет рассмотрен еще один конкретный пример $G_1(x, \beta)$ и $G_2(x, \beta)$ и более совершенный метод оценивания — метод доверительных интервалов.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность проф. М. П. Цапенко за дискуссию при постановке настоящей задачи и ряд ценных советов, а также всем участникам семинара «Вероятностные методы исследования систем измерения и контроля» Института автоматики и электрометрии СО АН СССР и в особенности В. М. Ефимову за сделанные ими замечания, которые я старался учесть при окончательной редакции статьи.

Приложение

Если каждому сработавшему элементу приписать 1, а несработавшему — 0, то эксперимент можно представить как (n_1+n_2)-мерную выборку, причем n_1-мерную — из распределения с точками сосредоточения массы 0 и 1 и соответствующими массами (вероятностями): $p'_1(\alpha, \beta) = 1 - G_1(\alpha, \beta)$ и $p'_2(\alpha, \beta) = G_2(\alpha, \beta)$ и n_2-мерную — из распределения с теми же точками сосредоточения массы и соответствующими вероятностями: $p''_1(\alpha, \beta) = 1 - G_2(\alpha, \beta)$ и $p''_2(\alpha, \beta) = G_2(\alpha, \beta)$. Тогда результат выборки (эксперимента) можно закодировать строчкой, где каждый из элементов ее есть или 0 или 1. Вероятность того, что среди n_1 первых элементов определенное место занимают k_1 единиц, а среди n_2 последних элементов k_2 единиц, определяется формулой (1). Вероятность, аналогичную последней, в математической статистике называют функцией правдоподобия для выборки и обозначают через L.

Оценка

$$\beta^* = \frac{2h}{c_1 - c_2}\left(\frac{k_2}{n_2} - \frac{k_1}{n_1}\right)$$

значения β также является несмещенной в среднем:

$$E(\beta^* = \sum_{k_1}\sum_{k_2} \frac{2h}{c_1 - c_2}\left(\frac{k_2}{n_2} - \frac{k_1}{n_1}\right) p\,(k_1, k_2; \alpha, \beta) =$$

$$= \frac{2h}{c_1 - c_2}\,[G_2(\alpha, \beta) - G_1(\alpha, \beta)] = \beta,$$

и для доказательства совместной эффективности оценок α^* и β^* достаточно показать выполнение равенств, аналогичных равенствам для совместноэффективных несмещенных оценок в случае выборки из одного непрерывного распределения с двумя неизвестными параметрами (ср. [2]), а именно:

$$E\left(\frac{\partial \log L}{\partial \alpha}\right)^2 = \frac{1}{(1-\rho^2)\,\sigma_1^2}; \quad E\left(\frac{\partial \log L}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \log L}{\partial \beta}\right) = \frac{-\rho}{(1-\rho^2)\,\sigma_1\sigma_2};$$

$$E\left(\frac{\partial \log L}{\partial \beta}\right)^2 = \frac{1}{(1-\rho^2)\,\sigma_2^2},$$

где σ_1, σ_2 и ρ — стандартные отклонения и коэффициент корреляции для оценок α^* и β^*.

Используя известные соотношения для биномиального распределения аналогично тому, как это сделано выше, можно получить:

$$\mu_{11} = E(\alpha^* - \alpha)(\beta^* - \beta) = \sum_{k_1}\sum_{k_2}\left[\frac{2h}{c_1 - c_2}\left(\frac{c_1 k_2}{n_2} - \frac{c_2 k_1}{n_1}\right) + m - h - \alpha\right] \times$$

$$\times \left[\frac{2h}{c_1 - c_2}\left(\frac{k_2}{n_2} - \frac{k_1}{n_1}\right) - \beta\right] p(k_1, k_2; \alpha, \beta) =$$

$$= \frac{4h^2}{(c_1 - c_2)^2}\left[\frac{c_1}{n_2} G_2(1 - G_2) + \frac{c_2}{n_1} G_1(1 - G_1)\right]$$

[для краткости опущены аргументы функций $G_1(\alpha, \beta)$ и $G_2(\alpha, \beta)$];

$$\sigma_2^2 = E(\beta^*)^2 - \beta^2 = \sum_{k_1}\sum_{k_2}\left[\frac{2h}{c_1 - c_2}\left(\frac{k_2}{n_2} - \frac{k_1}{n_1}\right)\right]^2 p(k_1, k_2; \alpha, \beta) - \beta^2 =$$

$$= \frac{4h^2}{(c_1 - c_2)^2}\left[\frac{1}{n_2} G_2(1 - G_2) + \frac{1}{n_1} G_1(1 - G_1)\right].$$

Отсюда

$$\frac{1}{(1 - \rho^2)\sigma_1^2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \mu_{11}^2} = \frac{1}{4h^2}\left[\frac{n_1}{G_1(1 - G_1)} + \frac{n_2}{G_2(1 - G_2)}\right];$$

$$\frac{-\rho}{(1 - \rho^2)\sigma_1\sigma_2} = \frac{-\mu_{11}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \mu_{11}^2} = \frac{-1}{4h^2}\left[\frac{n_1 c_1}{G_1(1 - G_1)} + \frac{n_2 c_2}{G_2(1 - G_2)}\right];$$

$$\frac{1}{(1 - \rho^2)\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \mu_{11}^2} = \frac{1}{4h^2}\left[\frac{n_1 c_1^2}{G_1(1 - G_1)} + \frac{n_2 c_2^2}{G_2(1 - G_2)}\right].$$

Находим далее

$$E\left(\frac{\partial \log L}{\partial \alpha}\right)^2 = E\left[\frac{\eta_1 - n_1 G_1}{G_1(1 - C_1)} G'_{1\alpha} + \frac{\eta_2 - n_2 G_2}{G_2(1 - G_2)} G'_{2\alpha}\right]^2 =$$

$$= \sum_{k_1}\sum_{k_2}\left[\frac{k_1 - n_1 G_1}{G_1(1 - G_1)} G'_{1\alpha} + \frac{k_2 - n_2 G_2}{G_2(1 - G_2)} G'_{2\alpha}\right]^2 p(k_1, k_2; \alpha, \beta) =$$

$$= \frac{n_1 (G'_{1\alpha})^2}{G_1(1 - G_1)} + \frac{n_2 (G'_{2\alpha})^2}{G_2(1 - G_2)} = \frac{1}{4h^2}\left[\frac{n_1}{G_1(1 - G_1)} + \frac{n_2}{G_2(1 - G_2)}\right]; \quad \textbf{(10)}$$

$$E\left(\frac{\partial \log L}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \log L}{\partial \beta}\right) = \sum_{k_1}\sum_{k_2}\left[\frac{k_1 - n_1 G_1}{G_1(1 - G_1)} G'_{1\alpha} + \frac{k_2 - n_2 G_2}{G_2(1 - G_2)} G'_{2\alpha}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{k_1 - n_1 G_1}{G_1(1 - G_1)} G'_{1\beta} + \frac{k_2 - n_2 G_2}{G_2(1 - G_2)} G'_{2\beta}\right] p(k_1, k_2; \alpha, \beta) =$$

$$= \frac{n_1 G'_{1\alpha} G'_{1\beta}}{G_1(1 - G_1)} + \frac{n_2 G'_{2\alpha} G'_{2\beta}}{G_2(1 - G_2)} = -\frac{1}{4h^2}\left[\frac{n_1 c_1}{G_1(1 - G_1)} + \frac{n_2 c_2}{G_2(1 - G_2)}\right], \quad \textbf{(11)}$$

$$E\left(\frac{\partial \log L}{\partial \beta}\right)^2 = \sum_{k_1}\sum_{k_2}\left[\frac{k_1 - n_1 G_1}{G_1(1 - G_1)} G'_{1\beta} + \frac{k_2 - n_2 G_2}{G_2(1 - G_2)} G'_{2\beta}\right]^2 \times$$

(12)

так что соответствующие равенства выполнены. Тем самым совместная эффективность α^* и β^* доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Салов. Об оценке измеряемой величины множеством релейных элементов со случайным порогом срабатывания.— Автометрия, 1969, № 1.
2. Г. Крамер. Математические методы статистики. М., Изд-во иностр. лит., 1948.

Поступила в редакцию
11 июня 1968 г.