А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я
№ 2 1969

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.317.088

С. А. ТИМОХИН
(Новосибирск)

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРИОДА СИГНАЛОВ ЧАСТОТНЫХ ДАТЧИКОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УЗКОПОЛОСНЫХ ПОМЕХ

В системах автоматического контроля и управления, использующих частотные датчики, определение периода сигналов производится путем его сравнения с образцовым интервалом времени, являющимся уставкой. Во многих случаях контролируемый сигнал в таких системах пропускается через формирующий каскад, придающий сигналу прямоугольную форму. В реальных условиях на формирователь наряду с полезным сигналом воздействуют помехи, которые приводят к флюктуациям моментов срабатывания формирователя. Это обусловливает появление ошибок контроля.

Практический интерес представляет исследование статистических характеристик погрешностей формирователя, вызванных влиянием малых стационарных узкополосных помех, центральная частота спектра f_0 которых близка к частоте полезного сигнала f_c. Это объясняется тем, что частотные датчики, как правило, содержат частотноселективные элементы. Помехи $\xi(t)$ на выходе последних можно представить в виде гармонического сигнала, случайно модулированного по амплитуде и фазе

$$\xi(t)=A(t)\cos[\omega_0 t-\psi(t)], \tag{1}$$

где $A(t)$ и $\psi(t)$ — медленно меняющиеся функции по сравнению с $\cos\omega_0 t$.

Рассмотрим случай, когда сигнал $U(t)$ на входе формирователя является аддитивной смесью гармонического сигнала $s(t)=A_M\cos\omega_c t$ и узкополосного нормального стационарного шума $\xi(t)$ с автокорреляционной функцией $K(\tau)=\sigma^2\rho(\tau)\cos\omega_0\tau$, причем $a=\frac{A_M}{\sigma}\gg 1$.

Сигнал $U(t)$ можно представить следующим образом [1]:

$$U(t)=E(t)\cos[\omega_c t-\varphi(t)], \tag{2}$$

где
$$E(t)=\{[A_c(t)+A_M\cos\Delta\omega t]^2+[A_s(t)-A_M\sin\Delta\omega t]^2\}^{\frac{1}{2}};$$
$$A_c(t)=A(t)\cos\psi(t);\quad A_s(t)=A(t)\sin\psi(t);\quad \Delta\omega=\omega_c-\omega_0;$$
$$\varphi(t)=\Delta\omega t+\Theta(t);\quad \Theta(t)=\operatorname{arctg}\frac{A_s(t)-A_M\sin\Delta\omega t}{A_c(t)+A_M\cos\Delta\omega t}.$$

Случайные функции $E(t)$ и $\varphi(t)$ являются соответственно огибающей и фазой суммы сигнала и шума, причем при $\Delta\omega\ll\omega_c$ они мало изменяются за период функции $\cos\omega_c t$.

В качестве идеализированной модели формирователя используется ограничитель с характеристикой

$$\eta=\begin{cases}1; & U(t)>b;\\ 0; & U(t)\leqslant b,\end{cases}$$

где величина b обусловлена влиянием на ограничитель ряда факторов (например, температуры). В дальнейшем будем считать, что $|b|\ll A_M$ и в интервале времени, необходимом для формирования одного импульса, сохраняется постоянным.

Длительность импульсов на выходе такого формирователя определяется моментами перехода сигнала (2) через пороговый уровень. Поскольку огибающая $E(t)$, подчиненная обобщенному релеевскому закону распределения вероятности, при большом отношении сигнал /шум мало отличается от A_M [1], то приближенно можно принять, что длительность сформированного импульса γ равна интервалу времени $[t_i, t_{i+1}]$ между переходами через пороговый уровень функции $A_M \cos[\omega_c t - \varphi(t)]$:

$$\gamma_i = t_{i+1} - t_i \simeq \pm \frac{\pi}{\omega_c - \dot{\varphi}} - 2\Delta, \tag{3}$$

где $\Delta = \frac{1}{\omega_c - \dot{\varphi}} \arcsin \frac{b}{A_M} \simeq \frac{1}{\omega_c - \varphi} \frac{b}{A_M}$; $\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t) \simeq \frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$

(рассматривается случай, когда медленно изменяющаяся в интервале $[t_i, t_{i+1}]$ функция $\varphi(t)$ дифференцируема, по крайней мере, по вероятности). Знак минус в первом слагаемом выражения (3) справедлив при $\dot{\varphi} > \omega_c$. Нетрудно показать, что вероятность выполнения этого неравенства очень мала. Действительно, производная от фазы случайного процесса (2) равна

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}[\Delta\omega t + \Theta(t)] = \Delta\omega + \frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{A_s(t) - A_M \sin \Delta\omega t}{A_c(t) + A_M \cos\Delta\omega t}.$$

При $a \gg 1$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{A_s(t) - A_M \sin\Delta\omega t}{A_c(t) + A_M\cos\Delta\omega t} \approx -\Delta\omega.$$

Следовательно, вероятные значения производной $\dot{\varphi}(t)$ в этом случае по порядку величин не превосходят $\Delta\omega$ и для них справедливо неравенство

$$\dot{\varphi}(t) \ll \omega_c. \tag{4}$$

Тогда выражение (3) можно представить как

$$\gamma_i = \frac{\pi}{\omega_c - \dot{\varphi}} - 2\Delta = \frac{1}{\omega_c - \dot{\varphi}}\left(\pi - \frac{2b}{A_M}\right). \tag{5}$$

Величина погрешности формирователя τ определяется

$$\tau = \gamma_i - T = \frac{1}{\omega_c}\left(\pi - \frac{2b}{A_M}\right)\left(1 - \frac{\dot{\varphi}}{\omega_c}\right)^{-1} - \frac{\pi}{\omega_c}, \tag{6}$$

где $T = \frac{\pi}{\omega_c}$ — длительность временного интервала между нулевыми значениями гармонического сигнала.

Учитывая (4), представим функцию $\left(1 - \frac{\dot{\varphi}}{\omega_c}\right)^{-1}$ в виде степенного многочлена, аппроксимирующего ее с требуемой точностью. Тогда формула (6) принимает следующий вид:

$$\tau = \frac{1}{\omega_c}\left(\pi - \frac{2b}{A_M}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega_c}\right)^k - \frac{\pi}{\omega_c}, \tag{7}$$

где n — степень полинома.

Определим основные числовые характеристики случайной погрешности τ. Как известно [2], при больших отношениях сигнал/шум плотность вероятности производной от фазы $\varphi(t) = \Delta\omega t + \Theta(t)$ приближается к нормальному закону с математическим ожиданием $m_{\dot{\varphi}} = \Delta\omega \exp\left\{-\frac{a^2}{2}\right\}$ и дисперсией $\sigma_{\dot{\varphi}}^2 = \frac{\Delta\omega^2 - \rho_0''}{a^2}$.

В последнем выражении $\rho_0'' = -\left.\frac{d^2\rho(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}$ является отрицательной величиной.

Нетрудно видеть, что в случае $\Delta\omega=0$ выполняются равенства: $m_{\dot\varphi}=0$ и $\sigma^2_{\dot\varphi}=-\frac{\rho_0''}{a^2}$.

Воспользовавшись известными правилами вычисления моментных функций при полиномиальном преобразовании нормальных процессов [3], находим величину среднего значения погрешности τ

$$m_\tau=\frac{1}{\omega_c}\left(\pi-\frac{2b}{A_M}\right)\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=}^{l\leqslant\frac{k}{2}}\frac{1}{\omega_c^k}\,\frac{k!\,(2l+1)!!}{(2l+1)!\,(k-2l)!}\,\sigma_{\dot\varphi}^{2l}\,m_{\dot\varphi}^{k-2l}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что m_τ является функцией математического ожидания $m_{\dot\varphi}$ и дисперсии $\sigma^2_{\dot\varphi}$ производной от фазы $\dot\varphi(t)$.

Если ограничиться второй степенью полинома (7), то среднее значение погрешности τ будет равно

$$m_\tau=\frac{1}{\omega_c}\left(\pi-\frac{2b}{A_M}\right)\left[\frac{m_{\dot\varphi}}{\omega_c}+\frac{m^2_{\dot\varphi}+\sigma^2_{\dot\varphi}}{\omega_c^2}\right]-\frac{2b}{A_M\,\omega_c}. \tag{9}$$

Согласно (9), основной вклад в величину средней погрешности вносит математическое ожидание производной от фазы $\varphi(t)$. Поправку второго приближения дает среднеквадратическое значение производной от фазы. Кроме того, существенное влияние на m_τ оказывает величина смещения порогового уровня b. В случае, когда $b=0$, выражение (9) равно $m_\tau=\frac{\pi}{\omega_c}\left(\frac{m_{\dot\varphi}}{\omega_c}+\frac{m^2_{\dot\varphi}+\sigma^2_{\dot\varphi}}{\omega_c^2}\right)$. При $\Delta\omega=0$ значение средней погрешности определяется величиной дисперсии производной от фазы

$$m_\tau=\frac{\pi}{\omega_c^3}\,\sigma^2_{\dot\varphi}=-\frac{\pi}{\omega_c^3}\,\frac{\rho_0''}{a^2}.$$

Практический интерес представляет выражение для дисперсии случайной погрешности. При степени полинома $n=2$ дисперсия погрешности равна

$$\sigma^2_\tau=\frac{1}{\omega_c^2}\left(\pi-\frac{2b}{A_M}\right)^2\left[\frac{\sigma^2_{\dot\varphi}}{\omega_c^2}+\frac{2}{\omega_c^4}\left(2m^2_{\dot\varphi}\sigma^2_{\dot\varphi}+\sigma^4_{\dot\varphi}\right)+\frac{4}{\omega_c^3}m_{\dot\varphi}\,\sigma^2_{\dot\varphi}\right]. \tag{10}$$

Основное влияние на величину флюктуационного разброса погрешности оказывает значение дисперсии $\sigma^2_{\dot\varphi}$. Поправки второго приближения указывают на зависимость σ^2_τ от среднего значения производной от фазы.

В качестве оценки точности рассматриваемого формирователя может быть использована среднеквадратическая ошибка. Ее значение в общем случае зависит от частоты ω_c контролируемого сигнала $s(t)$. Поэтому при оценке точности формирователя целесообразно использовать некоторую ошибку, усредненную по параметру ω_c, например

$$\bar\sigma_\tau=\left(\int\limits_{(\omega_c)}\sigma^2_\tau p(\omega_c)\,d\omega_c\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

где $p(\omega_c)$ — плотность вероятности частоты контролируемого сигнала. В частном случае, когда плотность вероятности $p(\omega_c)$ равномерна в некотором интервале $[\omega_1,\omega_2]$, выражение (11) можно записать так:

$$\bar\sigma_\tau=\left(\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\sigma^2_\tau\,d\omega_c\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Используя соотношение (7), можно с необходимой точностью определить также плотность вероятности случайной погрешности τ. Если ограничиться двумя членами разложения, то (7) имеет вид

$$\tau=\frac{1}{\omega_c^2}\left(\pi-\frac{2b}{A_M}\right)\dot\varphi-\frac{2b}{A_M\,\omega_c}. \tag{13}$$

Из (13) следует, что в первом приближении величина погрешности формирования линейно связана с производной от случайной фазы $\dot{\varphi}(t)$ и, следовательно, так же как и $\dot{\varphi}(t)$, имеет нормальный закон распределения. При этом среднее значение погрешности составляет

$$m_{\tau} = \frac{1}{\omega_c^2}\left(\pi - \frac{2b}{A_M}\right) m_{\dot{\varphi}} - \frac{2b}{A_M\,\omega_c} = \frac{\Delta\omega}{\omega_c^2}\left(\pi - 2\frac{b}{A_M}\right)\exp\left\{-\frac{a^2}{2}\right\} - \frac{2b}{A_M\,\omega_c},$$

а дисперсия

$$\sigma_{\tau}^2 = \left[\frac{1}{\omega_c^2}\left(\pi - \frac{2b}{A_M}\right)\sigma_{\dot{\varphi}}\right]^2 = \frac{1}{\omega_c^4}\left(\pi - \frac{2b}{A_M}\right)^2 \frac{\Delta\omega - \rho_0''}{a^2}.$$

В этом случае (12) для среднеквадратической ошибки, усредненной по параметру ω_c, описывается выражением

$$\bar{\sigma}_{\tau} = \frac{1}{a}\left(\pi - \frac{2b}{A_M}\right)\left(\frac{\Delta\omega^2 - \rho_0''}{3}\,\frac{\omega_1^2 + \omega_1\omega_2 + \omega_2^2}{\omega_1^3\,\omega_2^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Учет последующих членов разложения (7) искажает нормальный закон и делает его несимметричным.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Тихонов. Статистическая радиотехника. М., «Советское радио», 1966.
2. В. П. Жуков. Плотность вероятности производной фазы суммы синусоидального сигнала и гауссова шума.— Радиотехника и электроника, 1962, № 7.
3. Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления. М., «Советское радио», 1963.

Поступило в редакцию
5 мая 1968 г.

УДК 681.2.082+621.317.08

В. М. АЛЕКСАНДРОВИЧ, Ю. П. САМОХВАЛОВ
(Бийск)

О ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ КОДИРУЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ПОРАЗРЯДНОГО УРАВНОВЕШИВАНИЯ

Для кодирующих преобразователей, работающих в системах цифровой регистрации и обработки данных в особенности в многоканальных системах, регистрирующих разнородные по своим динамическим свойствам процессы, большое значение имеет анализ ошибок, связанных с изменением кодируемой величины за время кодирования.

В настоящей статье анализируются динамические свойства кодирующих преобразователей поразрядного уравновешивания (КППУ) при детерминированных входных сигналах. Анализу динамических погрешностей при детерминированных входных сигналах для данного класса преобразователей посвящена статья*. Принимаемый в этой работе метод численного анализа позволяет выявить некоторые свойства динамических погрешностей.

В настоящей статье предлагается метод описания динамических свойств КППУ с помощью динамической диаграммы, который позволяет конкретизировать свойства динамических погрешностей, указанные в работе*, и выявить новые, например опре-

---

* А. Н. Касперович, Н. В. Литвинов. О динамике цифровых измерительных приборов поразрядного уравновешивания.— Автометрия, 1966, № 1.