АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1969

УДК 621.391.519.2

М. С. ХАЙРЕТДИНОВ
(Новосибирск)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА К ОБНАРУЖЕНИЮ СЛАБЫХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ШУМОВ

В многоканальных устройствах обработки информации часто возникает задача обнаружения коррелированных сигналов или же одного сигнала на фоне шумов с одновременным использованием двух или большего числа каналов. Использование обычного корреляционного приемника, пригодного в этом случае, как известно, связано со сложностями при реализации. В данной работе рассматривается более простой метод обнаружения сигналов в двухканальной системе — метод фазового портрета. Фазовый портрет представляет собой диаграмму, описываемую векторной суммой двух процессов, получаемых на выходах двухканальной системы. Свойства полученной таким образом диаграммы определяются корреляционной зависимостью между процессами, а в конечном итоге, как будет показано далее, соотношением сигнал/шум на выходе каждого из каналов и не зависят от спектра сигналов.

Полезные свойства фазового портрета начинают проявляться уже при малых отношениях сигнал/шум (порядка 0,1 и выше). Метод фазового портрета представляет собой один из вариантов оптимального обнаружителя и может быть использован применительно к достаточно сложным сигналам.

Пусть на выходах двухканальной системы имеем два случайных процесса $\xi(t)$ и $\eta(t)$ вида

$$\xi(t) = x(t) + n_x(t); \qquad \eta(t) = y(t) + n_y(t), \tag{1}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — детерминированные процессы (сигналы); $n_x(t)$, $n_y(t)$ — стационарные нормальные случайные широкополосные процессы (шум), не коррелированные между собой.

В общем случае $x(t)$ и $y(t)$ считаем коррелированными между собой в силу физических связей внутри объекта, от которого они поступают. Рассмотрим задачу обнаружения этих сигналов для частного случая, когда $x(t) = E_{0x}\cos\omega_0 t$, $y(t) = E_{0y}\cos(\omega_0 t + \varphi)$, т. е. случай, когда один и тот же гармонический сигнал принимается по двум каналам. Как увидим в дальнейшем, выводы для этого допущения будут справедливы и в общем случае, когда $x(t)$ и $y(t)$ являются более сложными, коррелированными между собой сигналами.

Если ω_0 считать средней частотой спектров процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ (т. е. спектр сигнала заключен в спектре шума), то (1) можно записать в виде

$$\xi(t) = E_x(t)\cos[\omega_0 t + \varphi_x(t)]; \quad \eta(t) = E_y(t)\cos[\omega_0 t + \varphi_y(t)], \tag{2}$$

где $E_x(t)$, $E_y(t)$ — соответствующие огибающие, а $\varphi_x(t)$, $\varphi_y(t)$ — фазы процессов.

Диаграмма, которую образует векторная сумма процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$ представляет собой фазовый портрет в плоскости $\xi(t)$, $\eta(t)$, который описывается концом вектора $\vec{E}(t) = \vec{E}_x(t) + \vec{E}_y(t)$ с углом наклона $\gamma(t) = \operatorname{arctg}\frac{E_y(t)}{E_x(t)}$.

В дальнейшем определим функции распределения $W(E)$ и $W(\gamma)$, но прежде чем перейти к этому, найдем функции распределения $W(\xi)$ и $W(\eta)$. Совокупность реализаций $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — $\xi_i(t)$ и $\eta_i(t)$ — представляет собой сумму гармонического сигнала со случайной начальной фазой (считаем ее равномерно распределенной в пределах периода сигнала) и стационарного нормального шума и имеет функцию распределения вида [1]:

$$W(\xi) = \frac{1}{\sigma_ш\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_ш^2}} e^{-\frac{a_1}{2}} \left[I_0\left(\frac{a_1}{2}\right) I_0\left(\sqrt{a_1}\,\frac{\xi}{\sigma_ш}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n\left(\frac{a_1}{2}\right) I_{2n}\left(\sqrt{a_1}\,\frac{\xi}{\sigma_ш}\right)\right];$$

$$W(\eta) = \frac{1}{\sigma_ш\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma_ш^2}} e^{-\frac{a_2}{2}} \left[I_0\left(\frac{a_2}{2}\right) I_0\left(\sqrt{a_2}\,\frac{\eta}{\sigma_ш}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n\left(\frac{a_2}{2}\right) I_{2n}\left(\sqrt{a_2}\,\frac{\eta}{\sigma_ш}\right)\right]. \tag{3}$$

Здесь $\sigma_ш$ — среднеквадратическое шумов, которое для обоих каналов выбираем одинаковыми;

$a_1 = \frac{E_{0x}^2}{2\sigma_ш^2}$ — отношение **сигнал/шум в 1-м канале;**

$a_2 = \frac{E_{0y}^2}{2\sigma_ш^2}$ — отношение сигнал/шум во 2-м канале;

I_0, I_n, I_{2n} — функции Бесселя 1 рода от соответствующего аргумента.

Анализ выражений (3) показывает, что при достаточно малых a_1 и a_2 (<1) функции распределения $W(\xi)$, $W(\eta)$ приближаются к нормальным:

$$W(\xi) = \frac{1}{\sigma_ш\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_ш^2}}; \qquad W(\eta) = \frac{1}{\sigma_ш\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma_ш^2}},$$

где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ являются зависимыми между собой, так как коррелированы с коэффициентом корреляции

$$\rho(\tau) = \frac{\cos(\omega_0 \tau + \varphi)}{\sqrt{1+\frac{1}{a_1}}\sqrt{1+\frac{1}{a_2}}}.$$

Вывод этого соотношения приведен в приложении.

Так как о степени коррелированности процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ по виду фазового портрета можно судить при $\tau=0$, то будем использовать

$$\rho(0) = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\frac{1}{a_1}}\sqrt{1+\frac{1}{a_2}}}. \qquad (4)$$

С учетом сказанного выше совместная функция распределения $\xi(t)$ и $\eta(t)$ примет вид [2]

$$W(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_{ш}^2(1-\rho^2)} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\xi^2 - 2\rho\xi\eta + \eta^2}{\sigma_{ш}^2}\right)}. \qquad (5)$$

При переходе к полярным координатам, где

$$\xi(t) = E(t)\cos\gamma(t), \quad \eta(t) = E(t)\sin\gamma(t), \qquad (6)$$

с учетом формулы преобразования функции распределения [1] определим

$$W(E, \gamma) = W(\xi, \eta)E. \qquad (7)$$

Преобразуем выражение при степенном показателе в (5) с учетом (6):

$$\xi^2 - 2\rho\xi\eta + \eta^2 = E^2\cos^2\gamma - 2E^2\rho\cos\gamma\sin\gamma + E^2\cos^2\gamma = E^2(1-\rho\sin 2\gamma).$$

Теперь (7) можно записать так:

$$W(E, \gamma) = \frac{E}{2\pi\sigma_{ш}^2(1-\rho^2)} e^{-\frac{E^2}{2(1-\rho^2)\sigma_{ш}^2}(1-\rho\sin 2\gamma)}. \qquad (8)$$

Проинтегрировав полученное выражение по γ, получим

$$W(E) = \frac{E}{2\pi\sigma_{ш}^2(1-\rho^2)} e^{-\frac{E^2}{2\sigma_{ш}^2(1-\rho^2)}} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\alpha\sin 2\gamma}\, d\gamma,$$

где $\alpha = \frac{E^2\rho}{2\sigma_{ш}^2(1-\rho^2)}$. После замены подынтегрального выражения через ряды бесселевых функций найдем, что

$$W(E) = \frac{E}{\sigma_{ш}^2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{E^2}{2\sigma_{ш}^2(1-\rho^2)}} I_0(i\alpha). \qquad (9)$$

Полученное выражение представляет собой обобщенное релеевское распределение. Проинтегрировав (8) по E, получим

$$W(\gamma) = \frac{1}{2\pi\sigma_{ш}^2\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty E e^{-\frac{E^2}{2\sigma_{ш}^2(1-\rho^2)}(1-\rho\sin 2\gamma)}\, dE.$$

Вводя обозначение

$$\beta = \frac{1-\rho\sin 2\gamma}{2\sigma_{ш}^2(1-\rho^2)},$$

найдем табличный интеграл

$$\int_0^\infty E e^{-\beta E^2} \, d E = \frac{1}{2\beta}.$$

Подставим его в выражение $W(\gamma)$:

$$W(\gamma) = \frac{1}{2\pi \sigma_ш^2 \sqrt{1-\rho^2}} \frac{\sigma_ш^2 (1-\rho^2)}{1-\rho \sin 2\gamma} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1-\rho \sin 2\gamma}. \qquad (10)$$

Графики $W(\gamma)$ при разных значениях коэффициентов корреляции ρ приведены на рис. 1. Следует отметить, что выражение (10) справедливо при условии, что угол φ — разность фаз между гармоническими сигналами — заключен в пределах $(0 \div 90°) + n \cdot 360°$ $(270 \div 360°) + n \cdot 360°$, так как при этом условии $\rho \geqslant 0$. Если φ меняется в пределах $(90 \div 180°) + n \cdot 360°$, $(180 \div 270°) + n \cdot 360°$, то $\rho \leqslant 0$ и функция распределения $W(\gamma)$ будет симметрична относительно 135°:

$$W(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1+|\rho| \sin 2\gamma}.$$

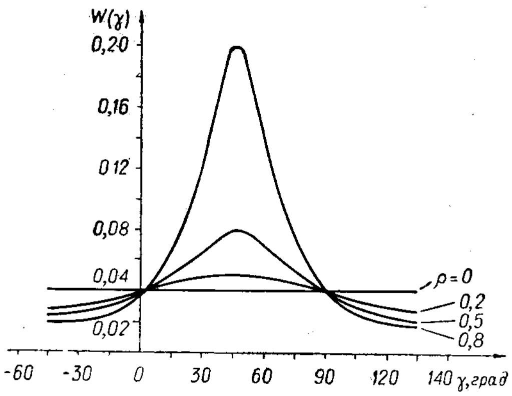

Рис. 1.

Из рассмотрения выражений (9) и (10) следует, что функции распределения $W(E)$ и $W(\gamma)$ независимы и характер поведения совместной функции распределения

$$W(E, \gamma) = W(E) \; W(\gamma)$$

при изменении γ в пределах (—180, +180°) будет определяться $W(\gamma)$.

Как видно из (10) и рис. 1, при $\rho=0$ $W(\gamma) = \frac{1}{2\pi}$, т. е. значения γ равновероятны и фазовый портрет в этом случае должен представлять круг рассеяния. С увеличением ρ (см. рис. 1) фазовый портрет сжимается вокруг большой оси фигуры рассеяния, расположенной под углом 45 или 135° (в зависимости от знака ρ) к горизонтали.

Вид $W(\gamma)$ зависит только от коэффициента корреляции между сигналами и не зависит от спектра сигналов. Поэтому выводы относительно $W(\gamma)$, полученные для случая, когда $x(t)$ и $y(t)$ — гармонические сигналы, будут справедливы и для случая, когда $x(t)$ и $y(t)$ — более сложные, коррелированные между собой сигналы, например узкополосные.

Действительно, коэффициент корреляции между узкополосными сигналами на выходах двухканального избирательного приемного устройства определяется как [3]

$$\rho(\tau) = \int_0^\infty S_\xi(\omega) K_1(\omega) K_2(\omega) \cos\left[\omega \tau + \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)\right] d\omega. \qquad (11)$$

Как и ранее, нам потребуется значение $\rho(0)$. Здесь $S_\xi(\omega)$ — спектральная плотность процесса на входе; $k_1(\omega)$ и $k_2(\omega)$, $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$ — амплитудно-частотные и фазовые характеристики соответственно 1-го и 2-го каналов.

В пределах полосы пропускания избирательного приемного устройства фазовые характеристики $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$ являются линейными и, следовательно, разность $\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)$ при одинаковых частотных характеристиках обоих каналов будет постоянной. Таким образом, выражение (11) приближенно может быть рассмотрено как сумма коэффициентов взаимокорреляции между соответствующими частотными составляющими на выходах обоих каналов, заключенными в полосе пропускания приемного устройства, причем разность фаз между ними не будет зависеть от частоты.

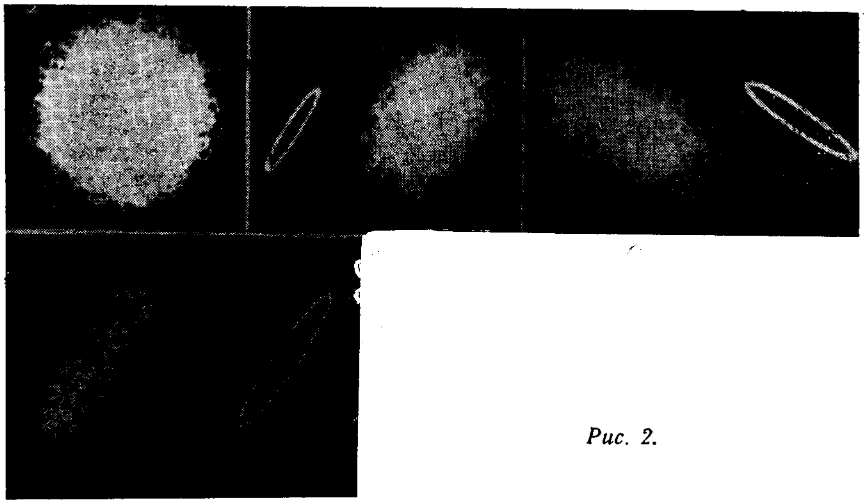

Рис. 2.

Экспериментально были получены фазовые портреты между процессами $\xi(t)$ и $\eta(t)$ в зависимости от коэффициента корреляции (4) между ними и ширины энергетического спектра процессов при условии, что шумы нормированы по среднеквадратическому, а отношения сигнал/шум в обоих каналах равны между собой. Частные виды их представлены на рис. 2, *а, б, в, г* ($a_1 = a_2 = 0$; $a_1 = a_2 = 0{,}2$; $\varphi = 20°$; $a_1 = a_2 = 0{,}4$;

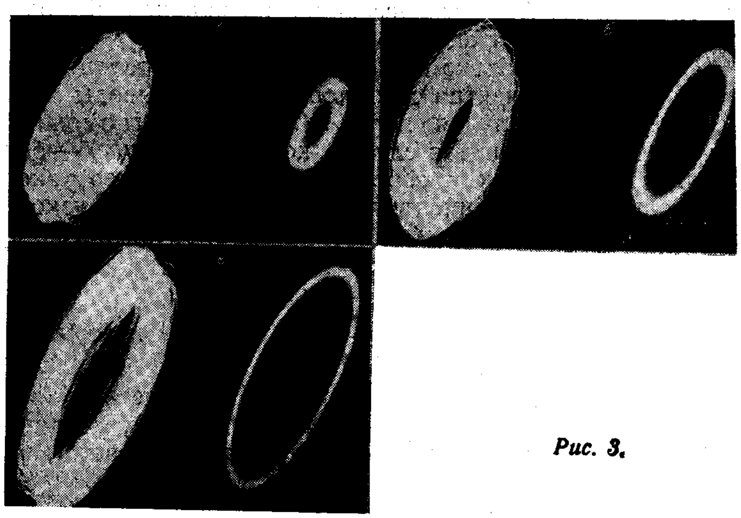

Рис. 3.

$\varphi=150°$; $a_1=a_2=0{,}8$; $\varphi=20°$) для широкополосных процессов ($\Delta f=50$ *гц*; $f_0=5$ *гц*) и рис. 3, *а*, *б*, *в* ($a_1=a_2=0{,}2$; $\varphi=45°$; $a_1=a_2=0{,}4$; $\varphi=45°$; $a_1=a_2=0{,}8$; $\varphi=45°$) для узкополосных процессов ($\Delta f=1$ *гц*; $f_0=5$ *гц*). Полученные экспериментальные данные подтверждают теоретические выводы. На основании экспериментальных данных можно сделать следующие выводы:

1) векторная сумма процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, которая характеризуется вектором $\vec{E}(t)=\vec{E}_x(t)+\vec{E}_y(t)$ и углом наклона $\gamma(t)$, образует фигуру рассеяния — эллипс, который при отношении сигнал/шум $a=0$ переходит в круг;

2) угол наклона большой оси фигуры рассеяния совпадает с углом наклона большой оси эллипса (на фотографиях он расположен рядом с соответствующей фигурой рассеяния), полученного в качестве фазового портрета между гармоническими сигналами, замешанными в шумах. Это соответствие сохраняется вплоть до малых отношений сигнал/шум ($a=0{,}1 \div 0{,}2$).

На рис. 4 представлен фазовый портрет между процессами $\xi(t)$ и $\xi'(t)$. Если в исходном процессе содержится периодическая составляющая, то даже при малых значениях a ее наличие будет зафиксировано (на рис. 4 $a=0{,}2$).

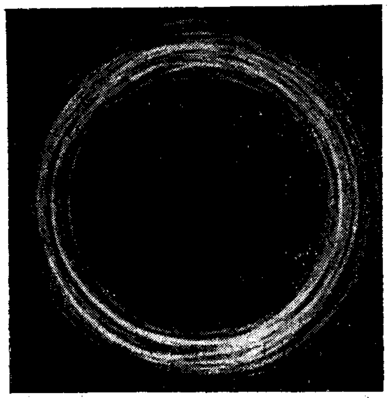

Рис. 4.

Нетрудно заметить, что метод фазового портрета является одним из вариантов оптимального обнаружения детерминированных сигналов на фоне шумов (корреляционный прием), осуществляемого по схеме [3] (рис. 5).

Как известно, результат интегрирования на выходе интегратора связан с апостериорной вероятностью наличия сигнала $x(t)$. Обнаружение с помощью метода фазового портрета сходно с обнаружением по схеме рис. 5, где вместо $x(t)$ использован процесс $\eta(t)$. Сам фазовый портрет является интегральной картиной, полученной за время от 0 до T [время реализаций $\xi(t)$ и $\eta(t)$], свойства которой, как было показано ранее, определяются коэффициентом корреляции между $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

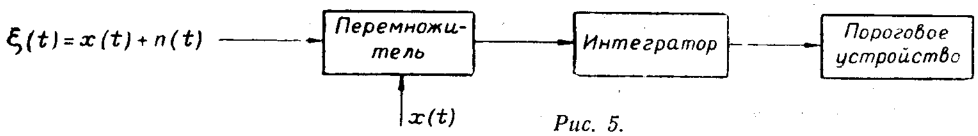

Рис. 5.

Максимальное значение функции распределения $W(\gamma)$ связано с апостериорной вероятностью наличия сигнала.

Выводы

При многоканальном приеме одного или нескольких сигналов, коррелированных между собой, метод фазового портрета позволяет обнаруживать слабые сигналы при соотношениях сигнал/шум вплоть до 0,1—0,2. Предполагается, что между шумами каналов корреляция отсутствует и спектр сигнала заключен в спектре шума. Метод фазового портрета является одним из вариантов метода оптимального обнаружения сигналов.

Приложение

Взаимно корреляционная функция между реализациями $\xi_i(t)$ и $\eta_i(t)$ равна $R_{\xi_i,\eta_i} = \langle \xi_i(t)\ \eta_i(t) \rangle$, с учетом (1)

$$R_{\xi_i,\eta_i} = \langle x(t)\, y(t) + x(t)\, n_y(t) + y(t)\, n_x(t) + n_x(t)\, n_y(t) \rangle .$$

Принимая сигнал и шум, а также шумы $n_x(t)$ и $n_y(t)$ некоррелированными, получим

$$R_{\xi_i,\eta_i} = \langle x(t)\, y(t) \rangle = \langle x(t) \rangle \langle y(t) \rangle + R_{xy} = R_{xy}.$$

Считаем, что $x(t)$ и $y(t)$ имеют среднее значение, равное нулю. R_{xy} — взаимно корреляционная функция между сигналами $x(t)$ и $y(t)$, которая просто может быть вычислена при предположении, что $x(t) = E_{0x} \cos \omega_0 t$, $y(t) = E_{0y} \cos(\omega_0 t + \varphi)$; вычисление по формуле

$$R_{xy} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

дает

$$R_{xy}(\tau) = \frac{E_{0x} E_{0y}}{2} \cos(\omega_0 \tau + \varphi).$$

Коэффициент взаимокорреляции составляет

$$\rho(\tau) = \frac{R_{\xi_i,\eta_i}}{\sigma_\xi\, \sigma_\eta} = \frac{R_{xy}}{\sigma_\xi\, \sigma_\eta},$$

где $\sigma_\xi = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_{nx}^2}$, $\sigma_\eta = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_{ny}^2}$ — среднеквадратические отклонения $\xi(t)$ и $\eta(t)$ соответственно.

Ранее было наложено условие, что шумы нормированы по среднеквадратическому, следовательно, $\sigma_{nx} = \sigma_{ny}$. Среднеквадратические гармонических сигналов σ_x и σ_y соответственно равны:

$$\sigma_x = \frac{E_{0x}}{\sqrt{2}}; \quad \sigma_y = \frac{E_{0y}}{\sqrt{2}}.$$

Имея в виду, что отношения сигнал/шум по каналам равны: $a_1 = \frac{E_{0x}^2}{2\sigma_{ш}^2}$; $a_2 = \frac{E_{0y}^2}{2\sigma_{ш}^2}$, окончательно получим

$$\rho(\tau) = \frac{E_{0x} E_{0y} \cos(\omega_0 \tau + \varphi)}{2\, \frac{E_{0x} E_{0y}}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{a_1}} \sqrt{1 + \frac{1}{a_2}}} = \frac{\cos(\omega_0 \tau + \varphi)}{\sqrt{1 + \frac{1}{a_1}} \sqrt{1 + \frac{1}{a_2}}}.$$

При $a_1 = a_2 = a$ $\rho(\tau) = \dfrac{\cos(\omega_0 \tau + \varphi)}{1 + \frac{1}{a}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Р. Левин. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М., «Советское радио», 1960.
2. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., «Наука», 1964.
3. В. И. Тихонов. Статистическая радиотехника. М., «Советское радио», 1966.

Поступила в редакцию
1 апреля 1968 г.