АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 1 1969

УДК 681.088+621.317.08

Г. И. САЛОВ
(Новосибирск)

ОБ ОЦЕНКЕ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ МНОЖЕСТВОМ РЕЛЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СО СЛУЧАЙНЫМ ПОРОГОМ СРАБАТЫВАНИЯ

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При реализации измерительного эксперимента по способу совпадения обычно настраивают на каждое из требуемых значений сравнения порог срабатывания только одного элемента. Для увеличения точности оценки измеряемой величины с помощью такого эксперимента необходимо уменьшать длину интервала дискретности значений сравнения, увеличивать точность настройки и стабильность значений порогов срабатывания элементов. Однако при таком пути не только возникают большие трудности, но, если требуемая точность оценки измеряемой величины выше возможной точности настройки всех значений порогов и уровня имеющей место нестабильности, то нельзя достигнуть желаемых результатов.

В связи с этим представляется небезынтересным исследование возможности увеличения точности оценки путем настройки на каждое требуемое значение сравнения порога не одного элемента, а некоторого множества однотипных элементов. В данной работе рассматривается одно такое множество. При настройке значения порога даже одним и тем же методом для всех элементов данного множества порог срабатывания в каждом элементе под влиянием случайных обстоятельств, не поддающихся или трудно поддающихся контролю, способен принимать различные значения. Что же касается поведения значений порогов во времени, то здесь необходимо учитывать а) изменение значения порога каждого элемента, представляющее собой функцию (случайную или нет) с большой связью с подобными функциями остальных элементов, и б) статистически независимые от элемента к элементу флуктуации значений порогов. Ниже будет принята во внимание только последняя нестабильность, которая приводит к тому, что значение порога срабатывания у каждого элемента флуктуирует во времени относительно некоторого среднего; несовершенство настройки значений порогов является причиной того, что это среднее меняется от элемента к элементу данного множества случайным образом. Отсюда можно утверждать, что в каждый момент времени значение порога меняется случайным образом от элемента к элементу.

Резюмируя сказанное, задачу сформулируем следующим образом. Имеется множество из n элементов, не влияющих на работу друг друга. Пороги срабатывания элементов представляют собой независимые случайные величины ζ_i, имеющие одну и ту же функцию распределения вероятностей $G(x)$. Иными словами, для всех ζ_i справедливо

$$P\{\zeta_i \leqslant x\} = G(x). \tag{1}$$

Одновременно на все элементы воздействует некоторая измеряемая величина с неизвестным значением α. В результате этого элементы, имеющие значение порога, меньшее или равное α, срабатывают. Требуется по числу сработавших элементов однократного эксперимента и выше указанной функции распределения вероятностей (1) оценить неизвестное значение α и высказать надежные вероятностные утверждения о разности между истинным значением α и его оценкой. Эта задача является аналогом задачи оценки неизвестного параметра функции распределения в статистике, поэтому условимся употреблять терминологию, соответствующую последней. При оценке неизвестного значения по результату эксперимента могут представиться следующие три возможности:

1) априорные сведения об измеряемой величине позволяют экспериментатору считать ее случайной величиной, подчиняющейся некоторой определенной и известной ему функции распределения вероятностей, т. е. существует единый случайный механизм, определяющий поведение величины α и соответствующую ей функцию распределения;

2) то же самое, кроме того (самое главное), что функция распределения экспериментатору неизвестна;

3) нет оснований считать, что α является случайной величиной. В данной работе нахождение оценок и их характеристики будут рассмотрены только для 1) и 3) возможностей.

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Обратимся к первой возможности. Обозначим априорное распределение измеряемой величины α через $F(x)$:

$$P\{\alpha \leqslant x\} = F(x).$$

Вся информация о неизвестном значении α, полученная в данном эксперименте, содержится в апостериорном законе распределения α при условии, что число сработавших элементов (обозначим его через η) равно его наблюдаемому значению. Когда $\alpha = x$, вероятность срабатывания определенных k элементов есть

$$[G(x)]^k [1 - G(x)]^{n-k}, \tag{2}$$

где $k = 0, 1, \ldots, n$. Информация о том, какие именно элементы сработали в данном эксперименте, ничего не проясняет в вопросе о неизвестном значении α. Поэтому достаточно знать только число сработавших элементов без указания, какими именно элементами оно реализовано. Так как множество, содержащее n элементов, имеет C_n^k подмножеств из k элементов, т. е. может быть C_n^k разных событий со срабатыванием k элементов, и каждое из них имеет одну и ту же вероятность (2), следовательно,

$$P\{\eta = k \mid \alpha = x\} = p(k \mid x) = C_n^k [G(x)]^k [1 - G(x)]^{n-k}. \tag{3}$$

Тогда условная вероятность α при условии, что $\eta=k$, равна (формула Байеса)

$$P\{\alpha \leqslant x \mid \eta = k\} = F(x \mid k) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} P(k \mid x)\, dF(x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} P(k \mid x)\, dF(x)}. \tag{4}$$

Очевидно, что, если результату эксперимента $\eta/n=k/n$ мы ставим в соответствие оценку α^* значения α, то чем меньше при этом разброс возможных значений α по каждую сторону от оценки α^*, тем лучше последняя. Но меру разброса — рассеяние — можно определять различными способами и каждому способу соответствует своя наилучшая оценка [1]. Здесь в качестве меры разброса будет рассматриваться математическое ожидание квадрата отклонения оценки $\alpha^* = \varphi\left(\frac{\eta}{n}\right)$ от истинного значения α, хотя могут быть взяты и другие функции отклонения. Математическое ожидание квадрата отклонения (ошибки), соответствующее оценке вида $\varphi\left(\frac{\eta}{n}\right)$ значения α, равно

$$E\left[\varphi\left(\frac{\eta}{n}\right) - \alpha\right]^2 = E\left\{E\left[\left(\varphi\left(\frac{\eta}{n}\right) - \alpha\right)^2 \mid \alpha = x\right]\right\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\varphi\left(\frac{k}{n}\right) - x\right)^2 p(k \mid x)\, dF(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi\left(\frac{k}{n}\right) - x\right)^2 p(k \mid x)\, dF(x). \tag{5}$$

Это выражение будет минимальным, когда $\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ равна математическому ожиданию апостериорного распределения α при условии $\eta=k$ (см., например, [2]). В таком случае наилучшая оценка, согласно (4), определяется выражением

$$\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, p(k \mid x)\, dF(x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(k \mid x)\, dF(x)}. \tag{6}$$

Тогда соответствующее этой оценке минимальное значение (5) равно

$$E\left[\varphi\left(\frac{\eta}{n}\right) - \alpha\right]^2 = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(k \mid x)\, dF(x) - \frac{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, p(k \mid x)\, dF(x)\right]^2}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(k \mid x)\, dF(x)}.$$

Ниже будет показано, что при больших значениях k и $n-k$ более или менее безразлично, каково априорное распределение $F(x)$. Полученная формула (6) пригодна для практического использования и дает наилучшую оценку, когда $F(x)$ известна. Однако в большинстве встречающихся на практике случаев распределение $F(x)$ неизвестно. Применение формулы (6), построенное на предположении, что, «когда ничего не известно об априорном распределении $F(x)$, мы «имеем право» предположить его равномерным» или другим, все равно каким, является искусственным и слишком произвольным, так как в итоге в (6) подставляется функция $F(x)$, не вытекающая из действительной ситуации.

МЕТОД МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ

Теперь будем считать α «переменной величиной в смысле обычного анализа», но ниже приведенное справедливо независимо от того, является ли α случайной величиной или нет. Выражение (3) можно рассматривать как функцию от x. Если результат эксперимента $\eta=k$, то естественно предположить, что наиболее правдоподобным значением α является то, для которого вероятность (3) наибольшая. Легко убедиться, что, когда $G(\alpha)$, $1-G(\alpha)\neq 0$, это значение есть решение уравнения $G(x)=\frac{k}{n}$. Возьмем это решение в качестве оценки α^* значения α. Как известно, такая оценка называется оценкой наибольшего правдоподобия. Если H — функция, обратная функции G, то оценка α^* имеет вид

$$\alpha^* = H\left(\frac{\eta}{n}\right). \tag{7}$$

Колебания оценки (7) относительно истинного значения α в данном случае могут быть охарактеризованы их двумя первыми моментами (математическими ожиданиями). Особое место как с формальной, так и с практической точки зрения здесь занимает равномерное в некотором интервале распределение значений порогов срабатывания элементов множества, т. е.

$$G(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\leqslant c; \\ \dfrac{x-c}{d-c} \text{ при } c<x\leqslant d; \\ 1 \text{ при } x>d. \end{cases} \tag{8}$$

Приведем два примера, где это распределение может иметь место. Если настройку значения порога производить для каждого элемента, не отдавая предпочтения никакому значению из интервала $[c, d]$ и удовлетворяя лишь тому, чтобы при многократных (для учета наличия флуктуаций значений порогов) испытаниях со значением воздействия, равным d (соответственно c), отношение числа испытаний со срабатыванием элемента к числу всех испытаний было равно или близко к 1 (соответственно к 0). Второй, более естественный пример: из партии изготовленных элементов отбираются те, которые удовлетворяют вышеприведенной последовательности испытаний. Если технологический процесс изготовления один и тот же для всех элементов, то значение порога срабатывания каждого элемента из партии подчиняется некоторому определенному закону распределения вероятностей $G_0(x)$. Значение порога каждого из отобранных элементов подчиняется так называемому усеченному распределению [1]

$$G(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant c; \\ \dfrac{G_0(x)-G_0(c)}{G_0(d)-G_0(c)} & \text{при } c<x\leqslant d; \\ 1 & \text{при } x>d. \end{cases}$$

Когда в пределах интервала $[c, d]$ $G_0(x)$ не сильно отличается от линейной функции, полученное распределение близко к прямоугольному. Для распределения (8) оценка наибольшего правдоподобия (7) равна

$$\alpha^* = \frac{\eta}{n}(d - c) + c.$$

Математическое ожидание ошибки, соответствующей этой оценке, для распределения (8), когда $c \leqslant \alpha \leqslant d$, равно нулю:

$$E(\alpha^* - \alpha) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{k}{n}(d - c) + c\right] C_n^k \left[\frac{\alpha - c}{d - c}\right]^k \left[1 - \frac{\alpha - c}{d - c}\right]^{n-k} - \alpha = 0,$$

т. е. оценка (7) для распределения (8) является несмещенной. Это значит, что если имеется ряд множеств по n элементов и значение порога каждого из всех элементов подчиняется одному и тому же распределению (8), то усреднение показаний экспериментов [оценок (7)] с применением этих множеств будет давать правильные результаты. Очевидно, что это среднее не равно среднему значений результатов последовательности экспериментов с одним и тем же множеством. Для распределения $G(x)$, отличного от прямоугольного, среднее значение оценки (7) имеет некоторое смещение $b(\alpha)$ относительно истинного значения α. Однако можно показать, что для распределений $G(x)$, встречающихся на практике, с увеличением числа элементов множества смещение $b(\alpha)$ исчезает.

Рассмотрим теперь математическое ожидание квадрата ошибки, соответствующей оценке (7). Когда $G'(\alpha) > 0$, оценка (7) значения α является регулярной оценкой в смысле Крамера [1]. Действительно, если сработавшему элементу поставить в соответствие 1, а несработавшему — 0, то результат эксперимента можно представить как n-мерную выборку из дискретного распределения с точками сосредоточения массы 0 и 1 и с соответствующими вероятностями $p_1(\alpha) = 1 - G(\alpha)$ и $p_2(\alpha) = G(\alpha)$. Тогда оценку (7) можно представить в виде

$$\alpha^* = H\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{n}\right),$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — выборочные значения из последнего дискретного распределения. Так как вероятность (2) при $x = \alpha$ соответствует вероятности $p_{i_1}(\alpha) \ldots p_{i_n}(\alpha)$ в определении Крамера [1], а вероятность (3) соответствует $q_\nu(\alpha)$, то $1/C_n^k$ соответствует $r_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1} | \nu}(\alpha)$ и регулярность оценки следует непосредственно по определению. В таком случае [1] для оценки (7) обязательно выполняется неравенство Крамера — Рао

$$E(\alpha^* - \alpha)^2 \geqslant \frac{\left(1 + \frac{d\, b(\alpha)}{d\, \alpha}\right)^2}{n \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{d \log p_i(\alpha)}{d\, \alpha}\right)^2 p_i(\alpha)},$$

где $b(\alpha)$ — вышеуказанное смещение оценки. Подставив сюда выражение для $p_i(\alpha)$, получим

$$E(\alpha^* - \alpha)^2 \geqslant \frac{G(\alpha)\,[1 - G(\alpha)]\,[1 + b'(\alpha)]^2}{n\,[G'(\alpha)]^2} \tag{9}$$

Знак равенства здесь достигается тогда, когда

$d \log p(k|\alpha)/d\alpha = l(\alpha^* - \alpha)$, где i не зависит от k, но может зависеть от α. Легко убедиться, что для распределения (8) последнее условие выполняется и имеет место

$$E(\alpha^* - \alpha)^2 = D^2(\alpha^*) = \frac{(d-\alpha)(\alpha-c)}{n}. \tag{10}$$

В правую часть выражения (10) входит неизвестное значение α, но так как $(d-\alpha)(\alpha-c)$ никогда не превосходит $\frac{1}{4}(d-c)^2$, то выбор n по формуле

$$n = \frac{(d-c)^2}{4D^2(\alpha^*)}$$

будет надежным при всех значениях α, удовлетворяющих неравенству $c<\alpha<d$. Для распределений, отличных от прямоугольного, неравенство (9) переходит в равенство при увеличении числа элементов множества (см., например, примечание Л. Н. Большева на стр. 229 книги [3]). Отметим, что подобно среднему значению оценки рассмотренное выше среднее значение квадрата ошибки характеризует эксперименты с разными множествами элементов.

ОЦЕНКА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРВАЛОВ

Теперь рассмотрим оценку неизвестного значения посредством интервала (во многих практических приложениях это также представляет интерес), ставя в соответствие числу сработавших элементов две границы для α: α_1 и $\alpha_2 (\alpha_1<\alpha_2)$. Так как α_1 и α_2 должны быть функциями числа сработавших элементов, то не может быть абсолютной уверенности в том, что $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$; можно лишь говорить о вероятности того, что это утверждение верно.

Для первой возможности, т. е. когда α представляет собой выборочное значение из совокупности с известным распределением $F(x)$ и $\eta=qn$, последняя вероятность есть

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dF(x|qn). \tag{11}$$

Можно показать, что, если для $0<\gamma<q<1-\gamma$ принять $\alpha_1=H(q)-\varepsilon$ и $\alpha_2=H(q)+\varepsilon$ и если $F'(x)=f(x)$ — непрерывная функция и $f(H(q))>$ $>\lambda>0$, то вероятность (11) имеет при $n\to\infty$ предел 1, сколь угодно малым не было бы положительное ε, т. е. здесь более или менее безразлично, какую функцию взять вместо $F(x)$, когда $n-k$ и k — достаточно большие числа.

Для третьей возможности для каждого значения вероятности события $\alpha_1<\alpha(\alpha<\alpha_2)$ граница α_1 (α_2) находится согласно теории доверительных интервалов; в частности, α_1 и α_2 могут быть найдены с помощью метода доверительных интервалов, предложенного Нейманом [1]. По-видимому, несколько более прямой путь нахождения α_1 и α_2 здесь дает применение к теории доверительных интервалов общих принципов проверки статистических гипотез. Вероятность (распределение вероятностей) (3) обладает одним замечательным свойством: если $G'(x)>0$ во всех точках x, в которых $0<G(x)<1$, то для любых $\theta_1<\theta_2$, для которых

$0<G(\theta_1)<G(\theta_2)<1$, вероятности $P\{\eta=k|\alpha=\theta_1\}$ и $P\{\eta=k\mid\alpha=\theta_2\}$ различны и отношение

$$\frac{p\{\eta=k\mid\alpha=\theta_2\}}{p\{\eta=k\mid\alpha=\theta_1\}}=\left[\frac{G(\theta_2)}{G(\theta_1)}\right]^k\left[\frac{1-G(\theta_2)}{1-G(\theta_1)}\right]^{n-k}$$

является возрастающей функцией от $k\,(0\leqslant k\leqslant n)$. Тогда, согласно теории критериев проверки статистических гипотез (см., например, [4], гл. III, § 5), α_1 и α_2 являются решениями соответствующих уравнений. В данном случае, когда известно, что наблюдаемое значение η есть k, и необходимо, чтобы вероятность события $\alpha_1<\alpha$ (соответственно $\alpha<\alpha_2$) была не меньше $1-\varepsilon_1$ (соответственно $1-\varepsilon_2$), α_1 и α_2 являются решениями уравнений:

$$\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i\,[G(x)]^i\,[1-G(x)]^{n-i}=1-\varepsilon_1; \tag{12}$$

$$\sum_{i=0}^{k} C_n^i\,[G(x)]^i\,[1-G(x)]^{n-i}=\varepsilon_2. \tag{13}$$

При этом если $k=0$, то $\alpha_1=\alpha_m$ — нижняя возможная граница α; если же $k=n$, то $\alpha_2=\alpha_M$ — верхняя возможная граница α. Для решения уравнений (12) и (13) удобно пользоваться таблицами доверительных пределов для вероятности биномиального распределения (см., например, в [5] таблицу 5.2). Когда $\varepsilon_1+\varepsilon_2<1$, вероятность того, что полученный доверительный интервал (α_1, α_2) содержит истинное значение α, не менее $1-\varepsilon_1-\varepsilon_2$. Это значит, что если имеется последовательность результатов экспериментов с применением разных множеств элементов и по каждому числу возбужденных элементов определяется α_1 и α_2 с учетом заранее заданных ε_1 и ε_2, то отношение числа экспериментов, в которых интервал (α_1, α_2) содержит соответствующее истинное значение α, к числу всех экспериментов будет с точностью, определяемой случайными колебаниями, не менее $1-\varepsilon_1-\varepsilon_2$.

Пример. Пусть $n=32$; $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0{,}05$ $(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2=0{,}9)$; $k=\mu=2$ $(n-k=n-\mu=30)$;

$$G(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant c;\\ x-c & \text{при } c<x\leqslant c+1;\\ 1 & \text{при } x>c+1.\end{cases}$$

По таблицам (см., например, [5], стр. 350) можно убедиться, что при этом $G(\alpha_1)=0{,}011$ и $G(\alpha_2)=0{,}184$. Следовательно, $\alpha_1=c+0{,}011$ и $\alpha_2=c+0{,}184$.

Выводы

Найдены простые выражения для оценки неизвестного значения измерительным экспериментом с применением множества релейных элементов. При некоторых условиях эти выражения дают наилучшие оценки. Полученные в настоящей работе соотношения показывают принципиальную возможность рассмотренного подхода к задаче увеличения точности результатов измерительного эксперимента и могут быть использованы для нахождения по заданной характеристике доброкачественности оценки необходимого числа элементов множества с учетом наличия флуктуаций и неточности настройки значений порогов срабатывания.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. М. П. Цапенко, под руководством которого была выполнена эта работа, за весьма полезные обсуждения и замечания, а также канд. техн. наук А. Н. Касперовичу за советы при написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Крамер. Математические методы статистики. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
2. H. Robbins. An ampirical Bayes' approach to statistics. Proc. Third Berkeley Symp. Math. Stat. and Probability; Berkeley and Los Angeles, University of California Press., 1956, v. 1. [Русский перевод: Математика, 1964, 8 : 2].
3. Б. Л. Ван-дер-Варден. Математическая статистика. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Э. Леманн. Проверка статистических гипотез. М., «Наука», 1964.
5. Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. Таблицы математической статистики. М., Наука», 1965.

Поступила в редакцию
23 февраля 1968 г.