А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 6 1968

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АВТОМЕТРИИ

УДК 53.08 : 519.27

А. Н. ПОКРОВСКИЙ
(Новосибирск)

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Обобщенные случайные процессы [1] встречаются в различных прикладных задачах; в качестве примеров можно указать, кроме теории массового обслуживания, на исследование спайковой активности нейронов [2] и на изучение статистики землетрясений. Частными случаями обобщенных случайных процессов являются обычные случайные процессы, случайные потоки и случайные выборки из случайных процессов. Наиболее простыми свойствами обладают стационарные процессы. Для решения различных задач, например задачи экстраполяции стационарного обобщенного случайного процесса [3], необходимо знать корреляционные или спектральные характеристики процессов. Обычно эти характеристики приходится определять из множества наблюдаемых реализаций процесса (или из одной реализации достаточной длины при условии эргодичности). В настоящее время для определения корреляционных характеристик случайных потоков используются методы, опирающиеся на специфику импульсных потоков и требующие применения специальной аппаратуры и алгоритмов [4].

Данная статья имеет целью привлечь внимание специалистов к способу измерения корреляционных и спектральных характеристик обобщенных процессов, позволяющему использовать обычную аппаратуру для анализа случайных процессов и решать естественным образом такие задачи, как, например, определение взаимной корреляции между случайным потоком и случайным процессом. Рассматриваемый способ основан на использовании изоморфизма между некоторыми классами обобщенных случайных процессов и случайными процессами.

Пусть M_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — классы основных функций, ограниченных и суммируемых на вещественной оси вместе с n производными, и G_n— классы обобщенных случайных процессов, определенные на M_n. Если $\varphi_0(t) \in M_n$ — основная функция, $x \in G_n$ — обобщенный случайный процесс, то $X(\tau) = x[\varphi_0(t-\tau)]$ — случайный процесс. Предположим также, что $\varphi_0(t)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi_0(t)\, dt \neq 0. \qquad (1)$$

Из [5] (теорема 9) следует, что любая основная функция $\varphi(t)$ может быть аппроксимирована линейной комбинацией сдвигов функции

$\varphi_0(t)$. Следовательно, $x[\varphi(t)]$ аппроксимируется линейной комбинацией сдвигов $X(\tau)$ (в смысле слабой сходимости функций распределения), т. е. обобщенный процесс x полностью определяется случайным процессом $X(\tau)$. Такое взаимно однозначное соответствие между обобщенными и случайными процессами всегда имеет место для стационарных (в узком смысле) обобщенных случайных процессов. В то же время существуют обобщенные случайные процессы, которые не определяются однозначно случайными процессами $X(\tau)$.

Если $\varphi_0(t)$ — импульсная переходная функция физической системы с передаточной функцией $\Phi(p)$ и на вход системы воздействует обобщенный процесс x, то $X(\tau)$ — случайный процесс на выходе системы. Условие (1) эквивалентно условию для передаточной функции системы

$$|\Phi(i\omega)| \neq 0; \quad -\infty < \omega < \infty. \tag{2}$$

Методы и аппаратура для определения корреляционных и спектральных функций стационарных случайных процессов хорошо известны [6], поэтому в дальнейшем будем считать известными автокорреляционную функцию $R_x(\tau)$ стационарного случайного процесса $X(\tau)$ на выходе фильтра, а также спектральную функцию $Q_x(\omega)$:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\, Q_x(\omega). \tag{3}$$

Обозначая $\sigma_x(\omega)$ спектральную функцию стационарного обобщенного процесса x, через $K_x(\psi)$ — корреляционный функционал,

$$\psi_{\tau_1-\tau_2}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\xi-\tau_1)\, \varphi_0(\xi-\tau_2+t)\, d\,\xi, \tag{4}$$

тильдой — преобразование Фурье, а символом E — операцию вычисления математического ожидания, находим:

$$\widetilde{\psi}_{\tau_1-\tau_2}(\omega) = e^{i\omega(\tau_1-\tau_2)}\, \Phi(i\omega)\, \Phi(-i\omega); \tag{5}$$

$$R_x(\tau_1-\tau_2) = E\,X(\tau_1)\,X(\tau_2) = E\,x(\varphi_{\tau_1})\,x(\varphi_{\tau_2}) =$$

$$= K_x(\psi_{\tau_1-\tau_2}) = \widetilde{K}_x(\widetilde{\psi}_{\tau_1-\tau_2}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\psi}_{\tau_1-\tau_2}(\omega)\, d\,\sigma_x(\omega). \tag{6}$$

Сравнивая (3) и (6), получаем соотношение

$$d\,Q_x(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2\, d\sigma_x(\omega), \tag{7}$$

из которого можно определить $\sigma_x(\omega)$ по $Q_x(\omega)$. Если обобщенный процесс x регулярный (в смысле [3]), то процесс $X(\tau)$ также регулярный, и существуют спектральные плотности $s_x(\omega) = \frac{d}{d\omega}\sigma_x(\omega)$ и $q_x(\omega) = \frac{d}{d\omega} Q_x(\omega)$. Тогда

$$s_x(\omega) = \frac{q_x(\omega)}{|\Phi(i\omega)|^2}. \tag{8}$$

Таким образом, последовательность действий при измерении корреляционного функционала и спектральной плотности обобщенного процесса $x \in G_n$ можно описать следующим образом. Выбирается фильтр (физическая система) с передаточной функцией $\Phi(p)$, принадлежащий множеству M_n, т. е. такой, что $|\Phi(p)| = O(|p|^{-n-1})$ при $|p| \to \infty$.

Обобщенный случайный стационарный процесс подается на вход этого фильтра; измеряется автокорреляционная функция $R_x(\tau)$ процесса на выходе фильтра. Вычисляется спектральная плотность $q_x(\omega)$ как преобразование Фурье $R_x(\tau)$. По формуле (8) определяется спектральная плотность $s_x(\omega)$ исходного обобщенного случайного процесса. Корреляционный функционал $K_x(\psi)$ (обобщенная функция) обобщенного процесса $x(\varphi)$ находится как преобразование Фурье (в обобщенном смысле) спектральной плотности $s_x(\omega)$.

Если при измерениях наибольший интерес представляет какой-либо определенный участок спектра, следует выбирать $\Phi(p)$ так, чтобы величина $|\Phi(i\omega)|^2$ была велика в этом диапазоне частот и мала при других частотах. В этом случае ошибки в определении $s_x(\omega)$ будут относительно малы в существенном диапазоне частот.

СТАЦИОНАРНО КОРРЕЛИРОВАННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Пусть $x \in G_n$ и $y \in G_m$ — стационарно коррелированные обобщенные стационарные случайные процессы; их можно рассматривать так же, как составляющие многомерного процесса. Выберем какие-либо функции $\varphi_1 \in M_n$ и $\varphi_2 \in M_m$, удовлетворяющие условию (1); будем считать φ_1, φ_2 импульсными переходными функциями физических систем с передаточными функциями $\Phi_1(p)$, $\Phi_2(p)$, удовлетворяющими условию (2). Если на вход этих линейных систем поступают обобщенные стационарные процессы x и y соответственно, то выходные сигналы $X(\tau)$ и $Y(\tau)$ являются обычными случайными процессами, стационарными и стационарно коррелированными. Для таких процессов методы и аппаратура для измерения взаимно корреляционной функции общеизвестны [6], поэтому будем считать, что взаимно корреляционная функция $R_{xy}(\tau)$ процессов $X(\tau)$, $Y(\tau)$ известна, равно как и взаимная спектральная функция этих процессов $Q_{xy}(\omega)$:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, d\, Q_{xy}(\omega). \tag{9}$$

Обозначим

$$\psi_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\xi - \tau_1)\, \varphi_2(\xi - \tau_2 + t)\, d\xi; \tag{10}$$

$$\widetilde{\psi}_{12}(\omega) = e^{i\omega(\tau_1-\tau_2)}\, \Phi_1(-i\omega)\, \Phi_2(i\omega). \tag{11}$$

По определению

$$R_{xy}(\tau_1 - \tau_2) = EX(\tau_1)\, Y(\tau_2) = Ex[\varphi_1(t-\tau_1)]\, y[\varphi_2(t-\tau_2)] =$$

$$= K_{xy}(\psi_{12}) = \widetilde{K}_{xy}(\widetilde{\psi}_{12}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\psi}_{12}(\omega)\, d\,\sigma_{xy}(\omega), \tag{12}$$

где $\sigma_{xy}(\omega)$ — взаимная спектральная функция обобщенных процессов x, y. Сравнивая (9) и (11), (12), находим

$$d\, Q_{xy}(\omega) = \Phi_1(-i\omega)\, \Phi_2(i\omega)\, d\,\sigma_{xy}(\omega). \tag{13}$$

Если существуют спектральные плотности $q_{xy}(\omega) = \frac{d}{d\omega} Q_{xy}(\omega)$, $s_{xy}(\omega) = \frac{d}{d\omega}\sigma_{xy}(\omega)$, то $s_{xy}(\omega)$ вычисляется по формуле

$$s_{xy}(\omega) = \frac{q_{xy}(\omega)}{\Phi_1(-i\omega)\, \Phi_2(i\omega)}. \tag{14}$$

Таким образом, для измерения взаимной корреляции процессов $x \in G_n$, $y \in G_m$ необходимо прежде всего выбрать фильтры с передаточными функциями $\Phi_1(p)$, $\Phi_2(p)$ такими, чтобы $\Phi_1(p) = 0(|p|^{-n-1})$, $\Phi_2(p) = 0(|p|^{-m-1})$ при $|p| \to \infty$. Далее подавая обобщенные случайные процессы x и y на вход этих фильтров, найдем взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(\tau)$ случайных процессов $X(\tau)$ и $Y(\tau)$ на выходе фильтров. По $R_{xy}(\tau)$ находим спектральную плотность $q_{xy}(\tau)$ (для регулярных процессов); затем по формуле (14) вычисляем взаимную спектральную плотность $s_{xy}(\omega)$ обобщенных процессов x и y. Обобщенную функцию, определяющую взаимный корреляционный функционал K_{xy} процессов x и y, можно получить, вычисляя обратное преобразование Фурье функции $s_{xy}(\omega)$.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Пусть $x \in G_n$ — регулярный обобщенный процесс, $\varphi_{\omega'} \in M_n$ — набор основных функций, зависящих от параметра ω'. Функции $\varphi_{\omega'}(t)$ можно считать импульсными переходными функциями фильтров с передаточными функциями $\Phi_{\omega'}(p)$. Подавая на вход фильтра обобщенный процесс x, можно измерить дисперсию случайного процесса на выходе фильтра $D_{\omega'}$. Из уравнений (3) и (7), учитывая, что для регулярного процесса $d\sigma_x(\omega) = s_x(\omega)d\omega$, находим выражение для дисперсии $D_{\omega'}$:

$$D_{\omega'} = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{\omega'}(i\omega)|^2 s_x(\omega)\, d\omega. \tag{15}$$

Если фильтр узкополосный и $|\Phi_{\omega'}(i\omega)|$ существенно отличается от нуля лишь в малой окрестности точки $\omega = \omega'$, то получаем формулу

$$D_{\omega'} \approx 2 s_x(\omega')\, \Delta\omega, \tag{16}$$

где $\Delta\omega$ — эффективная полоса пропускания фильтра;

$$\Delta\omega = \int_{0}^{\infty} |\Phi_{\omega'}(i\omega)|^2\, d\omega. \tag{17}$$

Имея набор узкополосных фильтров с различными частотами и измеряя дисперсию процессов на выходе фильтров, можно восстановить форму кривой $s_x(\omega)$ в интересующем нас диапазоне, используя формулу (16).

Иначе говоря, спектральную плотность обобщенного случайного процесса можно измерять с помощью обычных анализаторов спектров.

Остановимся на том случае, когда импульсная переходная функция фильтров спектрального анализатора не принадлежит M_n. В этом случае подавать обобщенный процесс непосредственно на вход анализатора спектра нельзя; необходимо на входе анализатора включить дополнительный фильтр, выбрав его так, чтобы импульсная переходная функция сложного фильтра, полученного последовательным соединением упомянутых фильтров, принадлежала M_n.

Как уже отмечалось, принадлежность фильтра к классу M_n связана со скоростью убывания АЧХ фильтра вне полосы пропускания. Так, для класса M_0 скорость убывания АЧХ должна быть не менее 20 децибел на декаду (по мощности), для класса M_1 (например, $x \in G_1$ — случайный поток биполярных импульсов) — 40 децибел на декаду.

Пример 1. *Спектральные измерения стационарного импульсного потока.* Пусть x — импульсный поток типа Пальма [7]; будем предполагать, что интенсивность потока λ уже измерена с помощью инерционного фильтра или прямым подсчетом импульсов (λ — среднее количество импульсов в секунду). Подадим этот поток на вход спектрометра и измерим спектральную плотность потока $s_x(\omega)$. Разумеется, спектральный диапазон следует при этом выбирать разумным образом; например, если исследуется стационарная импульсная активность нейронов центральной нервной системы, то целесообразно использовать спектрометр инфразвуковых частот (СИЧ).

С другой стороны, поток типа Пальма, как известно, полностью определяется функцией распределения межимпульсных интервалов $F(t)$, причем интенсивность потока составляет $\lambda = \left\{\int_0^\infty t\, dF(t)\right\}^{-1}$. Можно показать, что преобразование Лапласа $f(p)$ функции распределения $F(t)$ связано со спектральной плотностью $s_x(\omega)$ потока типа Пальма соотношением

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, dF(t) = \frac{2\lambda^2 - p\lambda + \dfrac{p^2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_x(\omega)}{\omega^2 + p^2}\, d\omega}{2\lambda^2 + p\lambda + \dfrac{p^2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_x(\omega)}{\omega^2 + p^2}\, d\omega}.$$

Функция распределения межимпульсных интервалов измеряется обычно с помощью анализатора импульсов. Однако, если такого прибора нет под рукой, можно использовать спектрометр для измерения спектральной плотности, а затем вычислить $F(t)$, пользуясь приведенной формулой.

Пусть, например, измеренная спектральная плотность хорошо аппроксимируется формулой $s_x(\omega) = \dfrac{b\,\omega^2}{\omega^2 + \beta^2}$. В этом случае легко вычислить:

$$f(p) = \frac{A_-(p)}{A_+(p)};$$

$$F'(t) = f(t) = \frac{A_-(p_-)}{A'_+(p_-)} e^{p_- t} + \frac{A_-(p_+)}{A'_+(p_+)} e^{p_+ t};$$

$$A_\pm(p) = 2\lambda^2 \beta + p\lambda(2\lambda \pm \beta) + p^2(b \pm \lambda),$$

где $p_\pm$ — корни уравнения $A_+(p) = 0$. Можно убедиться, что $f(t)$ является плотностью распределения.

Пример 2. *Взаимная корреляция стационарного импульсного потока и случайного процесса.* Пусть имеется стационарный поток импульсов x и стационарный случайный процесс $Y(\tau)$. Поток x подается на вход фильтра с передаточной функцией $\Phi(p)$. Измеряется взаимно корреляционная функция $R_{x\nu}(\tau)$ процесса на выходе фильтра $X(\tau)$ и случайного процесса $Y(\tau)$. Вычисляется взаимная спектральная плотность процессов $q_{xy}(\omega)$ как преобразование Фурье $R_{x\nu}(\tau)$. Взаимная спектральная плотность $s_{xy}(\omega)$ потока x и процесса $Y(\tau)$ находится по формуле

$$s_{xy}(\omega) = \frac{q_{xy}(\omega)}{\Phi(-i\omega)};$$

взаимно корреляционный функционал определяется как преобразование Фурье функции $s_{xy}(\omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд. Обобщенные случайные процессы.— Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 5.
2. Дж. Экклс. Физиология синапсов. М., «Мир», 1966.
3. Ю. А. Розанов. К экстраполяции обобщенных случайных стационарных процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1959, т. 4, № 4.
4. G. L. Gerstein, N. Y. Kiang. J. Biophys., 1960, v. 1, № 15.
5. Н. Винер. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., Физматгиз, 1963.
6. Б. С. Синицын. Автоматические корреляторы. Новосибирск, «Наука», 1965.
7. А. Я. Хинчин. Работы по математической теории массового обслуживания. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
23 августа 1967 г.,
окончательный вариант —
1 апреля 1968 г.