АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1968

УДК 62—501+62—503

Е. И. ШАПИРО, Н. М. ЩЕЛКАНОВЦЕВ
(Москва)

СИНТЕЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ С УЧЕТОМ МЕДЛЕННОМЕНЯЮЩИХСЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

1. Во многих практически важных случаях при решении задач обработки измерительной информации ошибки измерения могут быть разбиты на две группы: быстроменяющиеся, или флюктуационные, и медленноменяющиеся. Флюктуационная составляющая ошибки вызывается в основном собственными шумами измерительной аппаратуры. К медленноменяющимся могут быть отнесены аппаратурные ошибки, обусловленные дрейфом параметров измерительных устройств, систематические погрешности [1] и т. д. Скорость изменения медленноменяющейся ошибки обычно соизмерима со скоростью изменения полезного сигнала.

Возможности подавления флюктуационных ошибок измерения в результате математической обработки наблюдаемых сигналов исследовались во многих работах [2—4]. Полученные в настоящее время оптимальные алгоритмы сглаживания позволяют существенно снижать влияние флюктуационных ошибок на результаты измерения. Но по отношению к медленноменяющимся ошибкам эти алгоритмы неэффективны.

Трудности борьбы с медленноменяющимися ошибками вызваны тем, что эти ошибки, в отличие от флюктуационных, обладают свойствами, близкими к свойствам полезного сигнала. Обычно наиболее существенные меры по снижению медленноменяющихся погрешностей принимаются в процессе разработки, изготовления и наладки измерительных приборов и систем. Дополнительные возможности повышения эффективности информационных измерительных систем заключаются в специальной организации математической обработки результатов измерений, учитывающей структуру и статистические характеристики измеряемого сигнала и составляющих помех. Как показывает анализ, учет структуры помехи и характеристик медленноменяющихся ошибок при решении задачи оптимальной фильтрации позволяет в ряде случаев получить существенный выигрыш в точности обработки информации.

2. Представим процесс, подлежащий обработке, в виде

$$y(t)=s(t, \lambda)+\Delta y(t). \tag{1}$$

В этом выражении $s(t, \lambda)$ — полезный сигнал, зависящий от вектора случайных параметров λ, а $\Delta y(t)$ — ошибка измерения. Предположим, что $\Delta y(t)$ есть сумма двух слагаемых: флюктуационной ошибки

$n(t)$, представляющей собой случайный процесс с известным законом распределения, и медленноменяющейся ошибки $m(t, \mu)$, зависящей от случайного вектора μ. Тогда

$$y(t)=s(t, \lambda)+m(t, \mu)+n(t). \tag{2}$$

Пусть законы распределения случайных векторов λ и μ — $P(\lambda)$ и $P(\mu)$ — известны, а векторы λ, μ и помеха $n(t)$ статистически независимы.

В дальнейшем все величины будем рассматривать в дискретные моменты времени $t=0, T, \ldots, kT, \ldots$.

Введем векторы

$$\bar{y}[k]=\begin{vmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y[k] \end{vmatrix}, \quad \bar{n}[k]=\begin{vmatrix} n[0] \\ n[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n[k] \end{vmatrix}, \quad \bar{s}[k, \lambda]=\begin{vmatrix} s[0, \lambda] \\ s[1, \lambda] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s[k, \lambda] \end{vmatrix} \text{ и т. д.} \tag{3}$$

В качестве критерия оптимальности выберем условие минимума среднего риска [4]

$$R[N]=\int\limits_{\Omega[\hat{s}, \lambda]} W\{s[N, \lambda], \hat{s}\}\, P[\lambda, \hat{s}]\, d\,\Omega[\lambda, \hat{s}], \tag{4}$$

где W — выпуклая функция потерь; $\hat{s}$ — искомая оценка полезного сигнала $s[N, \lambda]$; $P[\lambda, \hat{s}]$ — совместная плотность распределения вектора λ и оценки $\hat{s}$, а $\Omega[\lambda, \hat{s}]$ — область изменения аргументов λ и $\hat{s}$.

Выражение для среднего риска $R[N]$ в рассматриваемом случае может быть представлено следующей зависимостью [4]:

$$R[N]=\int\limits_{\Omega[\lambda, \mu, \bar{y}[k], \hat{s}]} W\{s[N, \lambda], \hat{s}\}\, P[\lambda]\, P[\mu]\, P[\bar{y}[k]/\lambda, \mu] \times$$

$$\times\, \Gamma_k\{\hat{s}/\bar{y}[k]\}\, d\,\Omega[\lambda, \mu, \bar{y}[k], \hat{s}], \tag{5}$$

где $\Gamma_k\{\hat{s}\,|\,\bar{y}[k]\}$ — решающая функция, являющаяся условной плотностью распределения оценки $\hat{s}$ при заданной наблюдаемой выборке $\bar{y}[k]$, а $P[\bar{y}[k]/\lambda, \mu]$ — условная плотность распределения $\bar{y}[k]$ при фиксированных λ и μ.

Так как оптимальная баесова стратегия при выпуклой функции потерь является регулярной [4], то

$$\Gamma_k\{\hat{s}\,|\,\bar{y}[k]\}=\delta\{\hat{s}-\hat{s}[N, k]\}, \tag{6}$$

где δ — единичная импульсная функция.

Оптимальная оценка $\hat{s}[N, k]$ в этом случае является решением следующего функционального уравнения:

$$\int\limits_{\Omega[\lambda, \mu]} W\{s[N, \lambda], \hat{s}[N, k]\}\, P[\lambda]\, P[\mu]\, P[\bar{y}[k]/\lambda, \mu]\, d\,\Omega[\lambda, \mu]=\min_{\hat{s}[N, k]}. \tag{7}$$

3. Рассмотрим случай линейной зависимости полезной составляющей сигнала $s[k, \lambda]$ и медленноменяющейся ошибки $m[k, \mu]$ от случайных векторов λ и μ:

$$y[k] = \lambda^T \varphi[k] + \mu^T \Psi[k] + n[k], \tag{8}$$

где $\varphi[k] = |\varphi_0[k], \dots, \varphi_M[k]|^T$ и $\Psi[k] = |\Psi_0[k], \dots, \Psi_L[k]|^T$ — векторы, составляющие которых представляют собой известные функции дискретного времени.

При квадратичной функции потерь

$$W\{s[N, \lambda], \hat{s}[N, k]\} = \{s[N, \lambda] - s[N, k]\}^2 \tag{9}$$

уравнение (7) может быть решено. Искомая оценка $\hat{s}[N, k]$ в этом случае является условным математическим ожиданием сигнала $s[N, \lambda]$ при фиксированной выборке $\bar{y}[k]$ и определяется зависимостью [2, 3]

$$\hat{s}[N, k] = \frac{\int\limits_{\Omega[\lambda, \mu]} \lambda^T \varphi[N] P[\lambda] P[\mu] P[\bar{y}[k]/\lambda, \mu] \, d\Omega[\lambda, \mu]}{\int\limits_{\Omega[\lambda, \mu]} P[\lambda] P[\mu] P[\bar{y}[k]/\lambda, \mu] \, d\Omega[\lambda, \mu]}. \tag{10}$$

Пусть векторы λ и μ распределены по нормальному закону с математическими ожиданиями m_λ и m_μ и корреляционными матрицами K_λ и K_μ, а флюктуационная помеха $n[k]$ представляет собой нормально распределенную нестационарную случайную последовательность с нулевым средним значением и корреляционной матрицей $K[l, k]$. Нетрудно показать, что в этом случае выражение для оптимальной оценки $\hat{s}[N, k]$ имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{s}[N, k] = \varphi^T[N] \{K_\lambda^{-1} + \Phi_\lambda^T[k] K^{-1}[k, k] \Phi_\lambda[k] - \\ - \Phi_\lambda^T[k] K^{-1}[k, k] \Phi_\mu[k] A^{-1} \Phi_\mu^T[k] K^{-1}[k, k] \Phi_\lambda[k]\}^{-1} \times \\ \times \{K_\lambda^{-1} m_\lambda + \Phi_\lambda^T[k] K^{-1}[k, k] \bar{y}[k] - \Phi_\lambda^T[k] K^{-1}[k, k] \Phi_\mu[k] \times \\ \times (A^{-1})^T (K_\mu^{-1} m_\mu + \Phi_\mu^T[k] K^{-1}[k, k] \bar{y}[k])\},\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$A = K_\mu^{-1} + \Phi_\mu^T[k] K^{-1}[k, k] \Phi_\mu[k]. \tag{12}$$

В (11) и (12) через $\Phi_\lambda[k]$ и $\Phi_\mu[k]$ обозначены матрицы:

$$\Phi_\lambda[k] = \begin{Vmatrix} \varphi_0[0], \dots, \varphi_M[0] \\ \varphi_0[1], \dots, \varphi_M[1] \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_0[k], \dots, \varphi_M[k] \end{Vmatrix}; \tag{13}$$

$$\Phi_\mu[k] = \begin{Vmatrix} \Psi_0[0], \dots, \Psi_L[0] \\ \Psi_0[1], \dots, \Psi_L[1] \\ \dots\dots\dots \\ \Psi_0[k], \dots, \Psi_L[k] \end{Vmatrix}. \tag{14}$$

В частном случае, когда в составе ошибки измерения отсутствует медленноменяющаяся составляющая, т. е. когда $\Psi_i[k] \equiv 0$ $(i = 0, \dots, L)$, алгоритм, определяемый формулами (11), (12), совпадает с алгоритмом вычисления по критерию минимума среднеквадратической ошибки оценки сигнала $\lambda^T \varphi[k]$, наблюдаемого на фоне флюктуационных помех [3].

Из выражений (11), (12) следует, что оценка $\hat{s}[N, k]$ формируется по наблюдаемому сигналу $\bar{y}[k]$ линейным фильтром, параметры которого зависят от характеристик измеряемого сигнала, медленноменяющейся и флюктуационной составляющих помех.

Минимальное значение среднего риска $R[n]$, соответствующее оптимальному алгоритму обработки информации, определяется выражением

$$R[n] = E\{(\lambda^T \varphi[n] - \hat{s}[n, k])^2\} = \varphi^T[n]\ \{K_\lambda^{-1} + \Phi_\lambda^T[k]\, K^{-1}[k, k]\, \Phi_\lambda[k] -$$
$$- \Phi_\lambda^T[k]\, K^{-1}[k, k]\, \Phi_\mu[k]\, A^{-1}\, \Phi_\mu^T[k]\, K^{-1}[k, k]\, \Phi_\lambda[k]\}^{-1} \varphi[n]. \qquad (15)$$

4. Полученный в предыдущем разделе алгоритм оптимальной обработки информации может быть реализован в виде дискретного линейного нестационарного фильтра с растущей памятью. В данном разделе будет приведено решение задачи фильтрации с учетом медленноменяющихся ошибок измерений в виде удобных для реализации на ЭЦВМ рекуррентных соотношений.

Сформулируем задачу так, как это сделано в [5]. Пусть полезный сигнал и медленноменяющаяся ошибка формируются дискретными фильтрами:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \Phi[k+1, k]\, x[k] + u[k]; \\ y[k+1] &= \Psi[k+1, k]\, y[k] + v[k]. \end{aligned} \qquad (16)$$

Предположим далее, что имеется устройство, позволяющее измерять значение вектора $x[k]$. Работа этого устройства описывается преобразованием

$$z[k+1] = H[k+1]\, x[k+1] + G[k+1]\, y[k+1] + w[k+1]. \qquad (17)$$

Здесь x — есть n-мерный вектор состояний полезного сигнала; y — m-мерный вектор состояний медленноменяющейся ошибки; z — p-мерный вектор, характеризующий результаты измерений; w — p-мерный вектор, характеризующий флюктуационные ошибки измерений; Φ, Ψ, H, G — вещественные матрицы порядка $n \times n$, $m \times m$, $p \times n$, $p \times m$ соответственно; $u[k]$, $v[k]$, $w[k]$ — статистически независимы и представляют последовательности независимых гауссовых случайных величин с нулевыми средними и ковариационными матрицами:

$$\begin{aligned} E\{u[j]\, u^T[k]\} &= Q[j, k]\, \delta_{jk}; \\ E\{v[j]\, v^T[k]\} &= R[j, k]\, \delta_{jk}; \\ E\{w[j]\, w^T[k]\} &= S[j, k]\, \delta_{jk}, \end{aligned} \qquad (18)$$

где Q, R, S — вещественные положительно определенные матрицы порядка $n \times n$, $m \times m$, $p \times p$.

Начальные состояния $x[0]$ и $y[0]$ являются случайными гауссовыми векторами с нулевыми средними значениями и ковариационными матрицами:

$$\begin{aligned} &E\{x[0]\, x^T[0]\} = P_{11}[0];\ E\{x[0]\, y^T[0]\} = P_{12}[0]; \\ &E\{y[0]\, y^T[0]\} = P_{22}[0];\ E\{y[0]\, x^T[0]\} = P_{21}[0], \end{aligned} \qquad (19)$$

где $P_{11}[0]$, $P_{22}[0]$, $P_{12}[0]$, $P_{21}[0]$ — вещественные положительно определенные матрицы порядка $n\times n$, $m\times m$, $n\times m$ и $m\times n$ соответственно.

Оценки векторов $x[k]$ и $y[k]$, построенные на основании информации, имеющейся в момент времени j, обозначим через $\hat{x}[k/j]$ и $\hat{y}[k/j]$ (если $k=j$, то будем пользоваться обозначениями $\hat{x}[k]=\hat{x}[k/k]$, $\hat{y}[k]=\hat{y}[k/k]$).

Ошибка оценки определяется выражением

$$\tilde{x}[k/j]=x[k]-\hat{x}[k/j]. \tag{20}$$

Задача обработки информации заключается в том, чтобы на основании априорных данных и результатов измерений найти оценку $\hat{x}[k/j]$ для значения $x[k]$, которая минимизирует среднеквадратическую ошибку

$$E\{\tilde{x}^T[k/j]\,\tilde{x}[k/j]\}=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_j^2[k/j]\right\}. \tag{21}$$

Для решения поставленной задачи может быть использован подход, изложенный в [5].

Введем векторные пространства $X[j]$ и $Y[j]$, элементами которых являются линейные комбинации измерений $\sum\limits_{i=1}^{j} A[i]\,z[i]$ и $\sum\limits_{i=1}^{j} B[i]\,z[i]$. Здесь $A[i]$ и $B[i]$ — некоторые произвольные вещественные матрицы порядка $n\times p$ и $m\times p$ соответственно.

Обозначим ортогональную проекцию вектора $x[k]$ на пространство $X[j]$ через $\check{E}\{x[k]/X[j]\}$, а ортогональную проекцию вектора $y[k]$ на пространство $Y[j]$ — через $\hat{E}\{y[k]/Y[j]\}$.

Оптимальная оценка $\hat{x}[k/j]$ вектора $x[k]$ есть ортогональная проекция вектора $x[k]$ на $X[j]$ [5]:

$$\hat{x}[k/j]=\hat{E}\{x[k]/X[j]\}. \tag{22}$$

Аналогично можно записать

$$\hat{y}[k/j]=\hat{E}\{y[k]/Y[j]\}. \tag{23}$$

Используя выражения (16), (22) и (23), получим:

$$\hat{x}[k+1/k]=\Phi[k+1,\ k]\hat{x}[k];\quad \hat{y}[k+1/k]=\Psi[k+1,\ k]\hat{y}[k]. \tag{24}$$

Первое уравнение (24) дает решение задачи экстраполяции полезного сигнала.

Пусть $\tilde{z}[k/j]=z[k]-H[k]\hat{x}[k/j]-G[k]\hat{y}[k/j]$. Тогда, учитывая выражение (24), можно записать

$$\tilde{z}[k+1]=z[k+1]-H[k+1]\Phi[k+1,k]\hat{x}[k]-G[k+1]\Psi[k+1,k]\hat{y}[k]. \tag{25}$$

Введем векторное пространство $z[k+1]$, элементами которого являются векторы типа $K[k+1]\tilde{z}[k+1/k]$, где $K[k+1]$ — произвольная вещественная матрица порядка $n \times p$. Нетрудно показать, что пространства $X[k]$ и $Z[k+1]$ взаимно ортогональны и, взятые вместе, образуют пространство $X[k+1]$. Следовательно,

$$\check{E}\{x[k+1]/X[k+1]\} = \hat{E}\{x[k+1]/X[k]\} + \hat{E}\{x[k+1]/Z[k+1]\}. \qquad (26)$$

Введем векторное пространство $I[k+1]$, элементами которого являются векторы типа $\Delta[k+1]\tilde{z}[k+1/k]$, где $\Delta[k+1]$ — произвольная вещественная матрица порядка $m \times p$. Пространства $Y[k]$ и $I[k+1]$ взаимно ортогональны и, взятые вместе, образуют пространство $Y[k+1]$. Поэтому

$$\hat{E}\{y[k+1]/Y[k+1]\} = \hat{E}\{y[k+1]/Y[k]\} + \hat{E}\{y[k+1]/I[k+1]\}. \qquad (27)$$

Из выражений (25) и (26) следует, что

$$\begin{aligned}\hat{x}[k+1] &= \hat{x}[k+1/k] + K^*[k+1]\tilde{z}[k+1/k] = \Phi[k+1,k]\hat{x}[k] + \\ &+ K^*[k+1]\{z[k+1] - H[k+1]\Phi[k+1,k]\hat{x}[k] - G[k+1]\Psi[k+1,k]\hat{y}[k]\}.\end{aligned} \qquad (28)$$

Уравнение (28) дает решение задачи оптимальной линейной фильтрации. Из соотношения (28) видно, что для решения задачи необходимо производить оценку $\hat{y}[k]$ медленноменяющейся ошибки $y[k]$.

Из выражений (25) и (27) следует, что оптимальная оценка медленноменяющейся ошибки определяется выражением

$$\begin{aligned}\hat{y}[k+1] &= \hat{y}[k+1/k] + \Delta^*[k+1]\tilde{z}[k+1/k] = \Psi[k+1,k]\hat{y}[k] + \\ &+ \Delta^*[k+1]\{z[k+1] - H[k+1]\Phi[k+1,k]\hat{x}[k] - G[k+1]\Psi[k+1,k]\hat{y}[k]\}.\end{aligned} \qquad (29)$$

Введем блочные матрицы и векторы:

$$F[k+1,k] = \left|\begin{array}{c|c} \Phi[k+1,k] & 0 \\ \hline 0 & \Psi[k+1,k]\end{array}\right|;$$

$$T[k+1] = |H[k+1],\ G[k+1]|;$$

$$U[k] = \left|\begin{array}{c|c} Q[k] & 0 \\ \hline 0 & R[k]\end{array}\right|; \qquad K^0[k+1] = \left|\begin{array}{c} K^*[k+1] \\ \hline \Delta^*[k+1]\end{array}\right|;$$

$$\tilde{\varepsilon}[k] = \left|\begin{array}{c} x[k] - \hat{x}[k] \\ \hline y[k] - \hat{y}[k]\end{array}\right|; \quad \tilde{\varepsilon}[k+1/k] = \left|\begin{array}{c} x[k+1] - \hat{x}[k+1/k] \\ y[k+1] - \hat{y}[k+1/k]\end{array}\right|.$$

Ковариационные матрицы векторов $\tilde{\varepsilon}[k]$ и $\tilde{\varepsilon}[k+1/k]$ обозначим:

$$P[k] = E\{\tilde{\varepsilon}[k]\,\tilde{\varepsilon}^T[k]\} = \left|\begin{array}{c} P_{11}[k],\ P_{12}[k] \\ P_{21}[k],\ P_{22}[k]\end{array}\right|;$$

$$M[k+1] = E\{\tilde{\varepsilon}[k+1/k]\,\tilde{\varepsilon}^T[k+1/k]\} = \left|\begin{array}{c} M_{11}[k+1],\ M_{12}[k+1] \\ M_{21}[k+1],\ M_{22}[k+1]\end{array}\right|.$$

Матрица $K_{11}[k]$ является ковариационной матрицей ошибки решения задачи фильтрации.

Используя результаты работы [5], можно показать, что оптимальные значения матриц $K^*[k+1]$, $\Delta^*[k+1]$ и ковариационной матрицы ошибки оценки фильтрации определяются решением следующей системы уравнений:

$$K^0[k+1] = M[k+1]\, T^T[k+1]\,\{T[k+1]\,M[k+1]\,T^T[k+1] + S[k+1]\}^{-1};$$

$$M[k+1] = F[k+1, k]\,P[k]\,F^T[k+1, k] + v[k]; \tag{30}$$

$$P[k+1] = \{I - K^0[k+1]\,T[k+1]\}\,M[k+1].$$

Сформулируем основные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема. Решение задачи оптимальной фильтрации определяется уравнением

$$\hat{x}[k+1] = \Phi[k+1, k]\hat{x}[k] + K^*[k+1]\{z[k+1] - H[k+1]\,\Phi[k+1, k]\,\hat{x}[k] - G[k+1]\,\Psi[k+1, k]\,\hat{y}[k]\}, \tag{31}$$

где выражение для оптимальной оценки $\hat{y}[k]$ медленноменяющейся ошибки $y[k]$ имеет вид

$$\hat{y}[k+1] = \Psi[k+1, k]\,\hat{y}[k] + \Delta^*[k+1]\{z[k+1] - H[k+1]\,\Phi[k+1, k]\,\hat{x}[k] - G[k+1]\,\Psi[k+1, k]\,\hat{y}[k]\}. \tag{32}$$

Значения матриц $K^*[k+1]$, $\Delta^*[k+1]$ и ковариационной матрицы ошибки оценки фильтрации определяются решением матричной системы уравнений (30) с начальными условиями:

$$\hat{x}[0] = \hat{y}[0] = 0;$$

$$P[0] = \begin{vmatrix} P_{11}[0[, & P_{12}[0] \\ P_{21}[0], & P_{22}[0] \end{vmatrix}.$$

Характерная особенность полученного алгоритма заключается в том, что при нахождении оптимальной оценки полезного сигнала производится оценка и компенсация медленноменяющейся ошибки.

5. Рассмотрим пример, иллюстрирующий методику синтеза. Пусть $x[k+1] = \lambda$; $y[k+1] = \mu$; $z[k+1] = \lambda + \mu + w[k+1]$. В этом случае

$$\Phi[k+1, k] = \Psi[k+1, k] = U[k+1] = G[k+1] = 1;$$

$$F[k+1, k] = \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{vmatrix}; \quad T[k+1] = |\, 1{,}1\, |.$$

Предположим, что λ, μ — нормальные случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями σ_λ^2 и σ_μ^2, а флюктуационная ошибка представляет собой последовательность независимых случайных величин с нулевым средним и дисперсией σ_w^2.

Обозначим оптимальные оценки λ и μ в k-м такте через $\hat{\lambda}[k]$ и $\hat{\mu}[k]$ соответственно. В этом случае выражения (30), (31) и (32) имеют вид:

$$\hat{\lambda}[k+1] = \hat{\lambda}[k] + K^*[k+1]\{z[k+1] - \hat{\lambda}[k] - \hat{\mu}[k]\};$$

$$\hat{\mu}[k+1] = \hat{\mu}[k] + \Delta^*[k+1]\{z[k+1] - \hat{\lambda}[k] - \hat{\mu}[k]\};$$

$$\begin{vmatrix} K^*[k+1] \\ \Delta^*[k+1] \end{vmatrix} = M[k+1] \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \left\{ |\, 1, 1\, |\, M[k+1] \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \sigma_w^2 \right\}^{-1};$$

$$M\,[k+1] = P\,[k];$$

$$P\,[k+1] = \left\{ I - \left| \begin{matrix} K^*\,[k+1] \\ \Delta^*\,[k+1] \end{matrix} \right| \,|\,1,\;1\,|\, \right\} M\,[k+1];$$

$$P\,[0] = \left| \begin{matrix} \sigma^2_\lambda, & 0 \\ 0, & \sigma^2_\mu \end{matrix} \right|, \quad \hat{\lambda}\,[0] = \hat{\mu}\,[0] = 0.$$

Обозначим $E\,\{\lambda - \hat{\lambda}\,[k]\}^2 = \sigma^2_\lambda\,[k]$.

Результаты моделирования полученного фильтра на ЭЦВМ приведены на рис. 1. Моделирование проводилось при следующих значениях параметров: $\lambda=8{,}0$; $\mu=5{,}0$; $\sigma^2_w = 1000$; $\sigma^2_\lambda = 100$; $\sigma^2_\mu = 50$. Приведенные на рис. 1 графики иллюстрируют процесс уточнения оценок $\hat{\lambda}[k]$ и $\hat{\mu}[k]$ с увеличением числа обрабатываемых результатов измерений k.

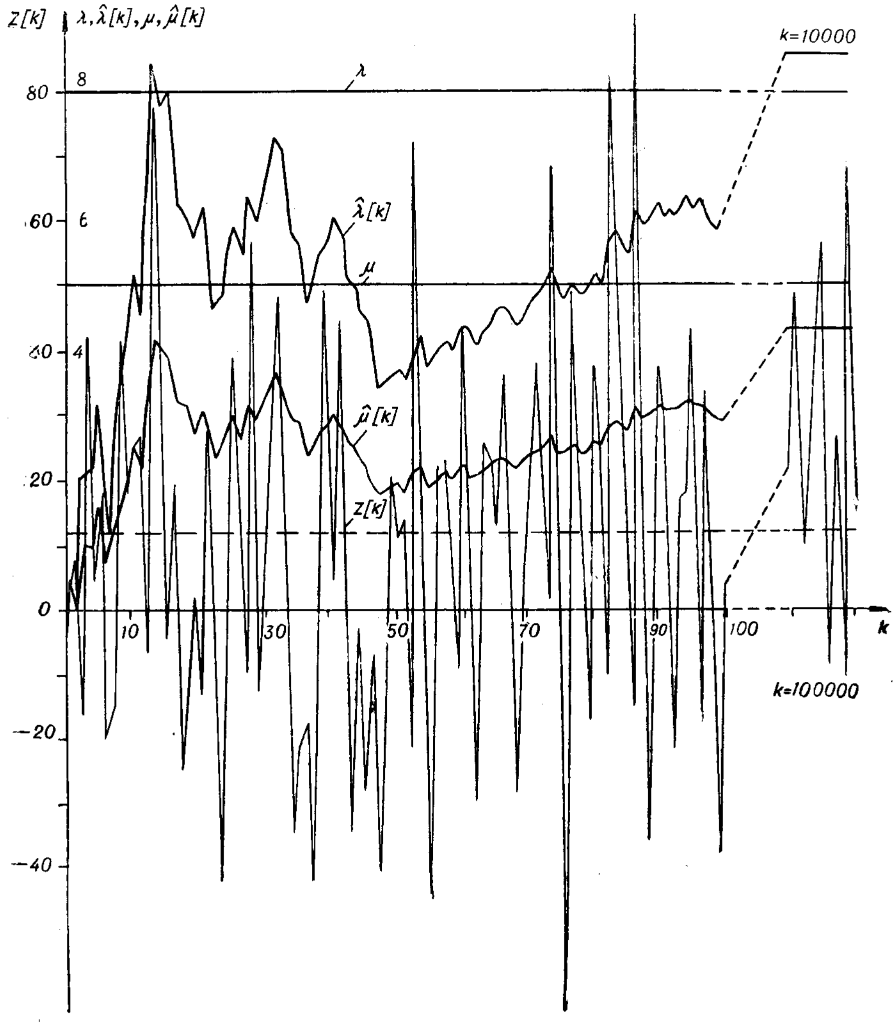

Рис. 1.

В рассмотренном примере при $k=10000$ ошибки определения оценок $\hat{\lambda}[k]-\lambda$ и $\hat{\mu}[k]-\mu$ равны соответственно 7 и 15%.

Представляет интерес сравнительный анализ алгоритмов, учитывающих и не учитывающих параметры медленноменяющихся ошибок измерения. Обозначим через $\sigma^2_{1\lambda}$ дисперсию оценки, формируемой оптимальным фильтром, не учитывающим наличия в измеренном сигнале медленноменяющейся ошибки в случае, когда такая ошибка во входном сигнале присутствует. Результаты расчетов σ^2_λ и $\sigma^2_{1\lambda}$ для различных значений σ^2_μ и числа измерений k приведены на рис. 2. Из графиков следует, что учет параметров медленноменяющихся ошибок при решении задачи обработки информации позволяет повысить точность определения оценок измеряемых сигналов.

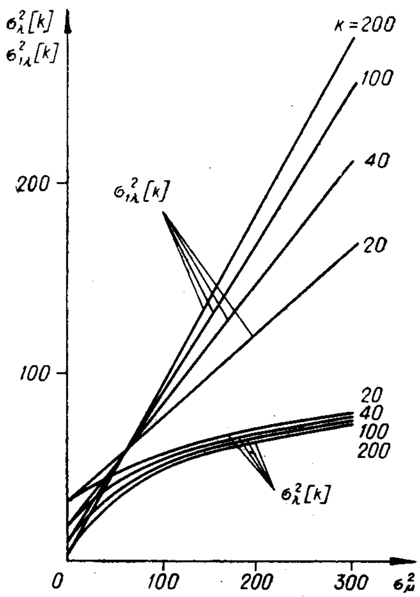

Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Пушной. О систематической погрешности.— Проблемы электрометрии. Новосибирск, «Наука», 1967.
2. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
3. Миддлтон. Введение в статистическую теорию связи. М., «Советское радио», 1962.
4. А. А. Фельдбаум. Основы теории оптимальных систем. М., Физматгиз, 1963.
5. R. E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems.— Trans. ASME. Serie D. J. Basic Engineering, March 1960.

Поступила в редакцию
25 декабря 1967 г.