АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 6 1968

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.317.385

В. И. СОЛОНЕНКО
(Новосибирск)

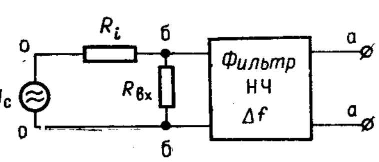
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОРОГ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ

В работе рассматривается вопрос о существовании энергетического порога при измерении, т. е. выясняется, существует ли такое количество энергии C, что если затратить за время измерения меньшее, чем C, количество энергии, то среднее количество полученной при этом информации будет равно нулю. Известны работы [1, 2], отвечающие на этот вопрос положительно.

В [1] Л. Бриллюэн описывает ситуацию обнаружения частицы в данном объеме (энергия в эксперименте затрачивается на «освещение» частицы). Из рассмотрения этого и некоторых подобных случаев следует вывод, что такой порог существует и равен $kT\ln 2 \approx 0{,}707\, kT$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. При температуре 300° К эта величина равна $0{,}28 \cdot 10^{-20}$ *дж*.

В [2] П. В. Новицкий обсуждает ситуацию измерения прибором непосредственной оценки (более правильно было бы называть этот «прибор» аналоговым преобразователем, так как погрешность квантования при этом не учитывается). Получено значение для порога, существенно отличающееся от значения Бриллюэна. Этот порог численно равен πekT, что при $T=300°$ К составляет $3{,}5 \cdot 10^{-20}$ *дж*. Заметим, что во втором случае аналоговый преобразователь рассматривается в отрыве от источника измеряемой величины (ИВ). В некоторых случаях это не приводит к серьезным неточностям, однако в общем случае представляется необходимым включать в рассмотрение источник ИВ и учитывать его параметры.

Далее анализируется случай измерения амплитуды напряжения аналоговым преобразователем (единственный источник энергии при измерении источник ИВ). Задача решается следующим образом: отыскивается связь между средним количеством получаемой при измерении информации об ИВ и минимальной энергетической ценой, которую «платит» источник ИВ за эту информацию. Аналоговый преобразователь имеет только погрешность, вызванную тепловыми флюктуационными шумами на сопротивлении источника ИВ и входном сопротивлении преобразователя $R_{вх}$. ИВ представляет собой стационарный случайный процесс, спектр которого сосредоточен в полосе Δf. Аналоговый преобразователь согласован по полосе пропускания с шириной спектра частот Δf. Таким образом, в момент отсчета ИВ представляет собой непрерывную случайную величину, закон распределения которой и параметры этого закона для различных моментов отсчета одинаковы. Можно приближенно считать, что случайные величины на выходе преобразователя, отсчитанные через интервалы, большие или равные $\frac{1}{2\Delta f}$, являются некоррелированными [3]. Погрешность в момент отсчета является непрерывной случайной величиной с нормальным законом распределения и математическим ожиданием, равным нулю. Спектр стационарного случайного процесса, выборки из которого дают значение погрешности в данный момент времени, сосредоточен в полосе частот Δf (в полосе пропускания аналогового преобразователя). Погрешность аддитивна и независима от ИВ.



На рисунке приведена эквивалентная схема рассматриваемого аналогового преобразователя. На его входе (точки $б - б$) имеем измеряемую случайную величину x и погрешность y, на выходе (точки $а - а$) — случайную величину $z=x+y$ в момент отсчета. Преобразователь подключается к источнику ИВ постоянно, отсчеты производятся через интервал времени $\tau = \frac{1}{2\Delta f}$.

В дальнейшем ход рассуждений близок к изложенному в [2], за исключением того, что в данной работе учитывается внутреннее сопротивление источника ИВ и рассматриваются информационные соотношения, а не точностные параметры преобразователя. Под энергетическим порогом понимается минимальное количество энергии, которое должен затратить источник ИВ для получения среднего количества информации, отличного от нуля.

В работе используются энтропийные коэффициенты [4], так как для рассматриваемого случая независимой от ИВ погрешности использование энтропийных коэффициентов позволяет несколько упростить вычисления. Среднее количество информации, которое несет одно значение непрерывной случайной величины z о непрерывной случайной величине x, можно описать выражением

$$I(x, z) = \log \frac{K_{x+y}\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{K_y \sigma_y}, \tag{1}$$

где $K_y = \frac{e^{h(y)}}{2\sigma_y}$ [2], а σ_x^2 и σ_y^2 — дисперсия в точках $б-б$ ИВ и погрешности y соответственно; через k обозначается энтропийный коэффициент. Выражение (1) аналогично обычной формуле [5]

$$I(x, z) = h(z) - h(y), \tag{2}$$

где $h(y)$, $h(z)$ — дифференциальная энтропия случайных величин y и z соответственно. Для теплового шума справедливо соотношение $\sigma_y^2 = 4kT\Delta f R_э$. Несложно показать (см., например, [6]), что $R_э = \frac{R_i R_{вх}}{R_i + R_{вх}}$;

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_c^2 R_{вх}^2}{(R_i + R_{вх})^2} = \left[\overline{P}_c (R_i + R_{вх}) - m_x^2\right] \frac{R_{вх}^2}{(R_i + R_{вх})^2},$$

где σ_c^2 — дисперсия э. д. с. ИВ в точках $о-о$; $\overline{P}_c$ — средняя мощность, отдаваемая источником ИВ; m_x — математическое ожидание ИВ x. Подставляя в (1) σ_x^2 и σ_y^2, получаем

$$I(x, z) = \log \frac{K_{x+y}}{K_y} \sqrt{\frac{\left[\overline{P}_c (R_i + R_{вх}) - m_x^2\right] \frac{R_{вх}^2}{(R_i + R_{вх})^2} + 4kT\Delta f \frac{R_i R_{вх}}{R_i + R_{вх}}}{4kT\Delta f \frac{R_i R_{вх}}{R_i + R_{вх}}}}. \tag{3}$$

Перепишем (3) в виде

$$I(x, z) = \log \frac{K_{x+y}}{K_y} \sqrt{1 + \frac{\overline{P}_c \tau}{2kT} \frac{R_{вх}}{R_i} - \frac{m_x^2 \tau}{2kT(R_i + R_{вх})} \frac{R_{вх}}{R_i}}.$$

Заметим, что $K_y = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}$ [2] (энтропийный коэффициент нормального закона). При данных энергетических затратах максимальное количество информации в среднем на один отсчет может быть получено, если $m_x = 0$ и закон распределения x такой, что $K_{x+y} = K_{max} = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}$ (это соответствует случаю, когда ИВ распределена по нормальному закону). При этих условиях

$$I(x, z)_{max} = \log \sqrt{1 + \frac{\overline{P}_c \tau}{2kT} \frac{R_{вх}}{R_i}}, \tag{4}$$

где $\overline{P}_c \tau = \overline{W}_c$ — средняя мощность, отдаваемая источником ИВ, умноженная на время одного измерения, т. е. средние энергетические затраты источника ИВ за время одного измерения. Это, иначе говоря, средняя энергетическая цена получаемого количества информации о ИВ при одном отсчете. Здесь $\tau = \frac{1}{2\Delta f}$ — интервал между отсчетами. Перепишем (4), используя двоичные логарифмы, т. е. вычисляя количество информации в двоичных единицах (битах):

$$I(x, z)_{\max} = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{\overline{W}_c}{2kT} \frac{R_{вх}}{R_i}\right). \tag{5}$$

Отсюда видно, что при $\overline{W}_c > 0$ количество информации больше нуля при сколь угодно малом $\overline{W}_c$, т. е. энергетического порога при измерении не существует (если не учитывать ограничений, накладываемых на рассматриваемый случай соотношением неопределенностей и дискретностью электричества). Вычислим минимальную стоимость одной двоичной единицы информации. Для этого примем левую часть (5) равной единице. Тогда $\frac{\overline{W}^{(1)}_{c\min}}{2kT} \frac{R_{вх}}{R_i} = 3$ или $\overline{W}^{(1)}_{c\min} = 6kT \frac{R_i}{R_{вх}}$. При $R_i = R_{вх}$ и T=300° К $\overline{W}^{(1)}_{c\min} = 2{,}43 \cdot 10^{-20}$ *дж*. Минимальная стоимость двух битов составляет $\overline{W}^{(2)}_{c\min} = 30\,k\,T \frac{R_i}{R_{вх}}$, что при тех же условиях равно $12{,}15 \cdot 10^{-20}$ *дж*, т. е. второй бит «оплачен» не $2{,}43 \cdot 10^{-20}$ *дж*, а уже $(12{,}15 - 2{,}43) \cdot 10^{-20}$ *дж* $= 9{,}72 \cdot 10^{-20}$ *дж*, т. е. «стоит» он в 4 раза «дороже». Это — следствие логарифмической зависимости между энергетическими затратами и количеством получаемой информации. Заметим, что в [7] получен отрицательный ответ при рассмотрении подобного вопроса о существовании амплитудного порога при измерении. Интересно сопоставить результаты, полученные здесь, с подобными результатами работы [2]. В [2] применяются точностные характеристики прибора, а не информационные, поэтому непосредственное сравнение результатов затруднительно. Если воспользоваться нашим подходом и получить результаты, аналогичные тем же в статье [2], то их сопоставление будет вполне правомерно.

Приведенная «информационная» погрешность в [2] определяется как $\gamma_ш = \frac{K_ш \sigma_ш}{E}$, где $K_ш$ — энтропийный коэффициент для теплового шума $K_ш = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}$, а $\sigma_ш$ — среднеквадратическое значение напряжения шума; E — верхний предел диапазона измерительного прибора. В нашем случае в точках $a - a$ имеем $\sigma^2_ш = 4k\,T\,\Delta f \frac{R_i R_{вх}}{R_i + R_{вх}}$,

$$\gamma_ш = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{\pi e}{2}} \cdot \sqrt{4k\,T\,\Delta f \frac{R_i R_{вх}}{R_i + R_{вх}}} \quad \text{или} \quad \gamma^2_ш \frac{E^2 \tau}{R_{вх}} \frac{R_i + R_{вх}}{R_i} = \pi e k T.$$

Здесь $\frac{E^2 \tau}{R_{вх}} = W_п$ — энергия, потребляемая прибором за время измерения τ, если ИВ равна своему максимальному значению. Если принять $\gamma_ш = 1$, то в предельном, по мнению автора [2], случае получим

$$W_п \frac{R_i + R_{вх}}{R_i} = \pi e k T. \tag{6}$$

Соотношение (6) отличается от подобного результата [2] членом $\frac{R_i + R_{вх}}{R_i}$. Поэтому формула работы [2] может считаться точной только при $R_i \gg R_{вх}$. Но этот случай не является типичным для вольтметра. Если $R_{вх} = 100\,R_i$, что более соответствует действительному положению вещей, то $W_п$ в [2] завышено примерно на два порядка. Из (6) можно видеть, что энергетического порога чувствительности, даже в рассматриваемом автором [2] смысле, не существует. Заметим еще, что $W_п$, в пределах применимости формулы работы [2] $(R_i \gg R_{вх})$, не характеризует полных затрат источника ИВ за время измерения, так как значительная часть расходуемой источником ИВ энергии выделяется на внутреннем сопротивлении источника ИВ.

Если ставится задача получения определенного количества информации за минимальную энергетическую «цену», то достигнуть этого можно различными путями, которые вытекают из рассмотренных выше соотношений. Остановимся только на двух из них: уменьшении соотношения $\frac{R_i}{R_{вх}}$ и использовании логарифмической зависимости между количеством информации и затрачиваемой энергией. Величина дроби $\frac{R_i}{R_{вх}}$ может быть как угодно близка к нулю. Для получения значения энергетической платы, равного «порогу» Л. Бриллюэна ($0{,}28 \cdot 10^{-20}$ *дж* за один бит при комнатной температуре), достаточно иметь $R_{вх} = 8{,}7\ R_i$, чего нетрудно достичь. Несколько слов о втором пути. Для его реализации следует данную энергию расходовать частями на несколько измерений, между которыми должны быть достаточно продолжительные паузы, позволяющие уменьшить корреляцию между соседними отсчетами. При этом за один отсчет получается в среднем небольшое количество информации, но за ту же энергетическую цену можно получить большее количество информации, чем при одном измерении. Отметим, что такая возможность достаточно формальна, так как получаемое таким образом количество информации характеризует ИВ в разные моменты времени. Физическая интерпретация этого пути может представлять самостоятельный интерес.

В данной работе рассматривался простейший случай измерения с помощью аналогового преобразователя, имеющего единственную погрешность за счет тепловых шумов на входе. Однако полученные для данной модели результаты могут быть полезны и для более общего случая, так как его можно тем или иным образом свести к рассмотренной здесь модели. Полученные результаты могут представлять интерес при рассмотрении цифровых измерительных приборов, которые имеют дополнительную специфическую погрешность квантования. Минимальная энергетическая цена, вычисляемая по формуле (5), представляет собой нижнюю оценку энергетических затрат при измерении цифровыми измерительными приборами (в частности, вольтметрами).

В заключение хочу поблагодарить проф. М. П. Цапенко за постановку данной работы и за ценные советы в процессе ее выполнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Бриллюэн. Наука и теория информации. М., Физматгиз, 1960.
2. П. В. Новицкий. О тесной и принципиальной связи точности, чувствительности, потребления и быстродействия измерительных устройств.— Измерительная техника, 1964, № 1.
3. И. Т. Турбович. Метод близких систем. М., Изд-во АН СССР, 1961.
4. П. Б. Новицкий. Понятие энтропийного значения погрешности.— Измерительная техника, 1966, № 7.
5. К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
6. И. М. Айнбиндер. Вопросы теории и расчета УКВ каскадов радиовещательного приемника. М., Госэнергоиздат, 1958.
7. А. А. Харкевич. Борьба с помехами. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
11 апреля 1968 г.

УДК 681.142.82+681.142.34

С. С. ПОПОВ
(Ленинград)

КОРРЕЛЯТОРЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВОЙСТВ ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИИ

Определение взаимно корреляционной функции процессов $x(t)$ и $y(t)$ требует вычисления выражения

$$K(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, y(t - \tau)\, dt \qquad (1)$$

при различных значениях параметра τ.