АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1968

Ю. Л. РОЗОВ, О. Н. ТИХОНОВ, И. В. ЧЕЛПАНОВ

(Ленинград)

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОГО СПОСОБА ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ОПТИМАЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ДИСКРЕТНОСТИ

1. Рассматривается задача восстановления непрерывного сигнала по его дискретным значениям, полученным через равные промежутки времени. Такая задача возникает при обработке данных телеметрии или результатов измерений, полученных от прибора, дискретного по своему принципу действия.

Алгоритм обработки представляет собой интерполяционную формулу. Точность интерполяции характеризуется величиной среднеквадратичной погрешности, зависящей от точности результатов измерения, а также от алгоритма интерполяции и интервала поступления дискретных данных. Применение классических способов оценки точности интерполяции [1] представляется затруднительным, так как это связано или с априорным знанием самой восстанавливаемой функции, или хотя бы с величиной ее производной.

В [2] рассматривается задача оценки точности и построения оптимальных алгоритмов интерполяции по известным вероятностным характеристикам измеряемого процесса. При этом полагается, что погрешностью результатов измерения можно пренебречь, т. е. имеющиеся дискретные значения измеряемого сигнала считаются абсолютно точными.

2. В настоящей работе рассматриваются условия, когда погрешность измерения существенно отлична от нуля, и дается общая методика построения оптимального на некотором классе функций алгоритма интерполяции и нахождения оптимального интервала поступления данных.

Критерием оптимума принимаем минимум дисперсии погрешности интерполяции. Восстанавливаемый сигнал и погрешность измерения считаем стационарными случайными функциями времени с известными корреляционными функциями.

Основное внимание в работе уделено вопросу об оптимальном значении интервала дискретности T. Оптимальное значение T может существовать только при определенных ограничениях на способ интерполяции. Если при любом значении T допускается как угодно сложный способ интерполяции, то уменьшение T дает монотонное уменьшение дисперсии погрешности, так как при этом количество информации, поступающей в единицу времени, непрерывно растет. Если же фиксируется или интерполяционная формула, или, по крайней мере, ее порядок, то зависимость дисперсии погрешности от T может иметь минимум. Кажущийся парадоксальным эффект уменьшения дисперсии погрешности интерполяции с увеличением T можно пояснить на простейшем примере.

Пусть полезный сигнал — постоянный ($s=c$), а погрешности n измерения его дискретных значений случайны с дисперсией σ_0^2, причем при $T\to\infty$ они становятся статистически независимыми, а при $T\to 0$ — одинаковыми. Тогда при $T\to\infty$ дисперсия погрешности линейной интерполяции составляет $\sigma_e^2=\frac{\sigma_0^2}{2}$ (при статистической независимости погрешностей измерения осреднение дает уменьшение дисперсии), а при $T\to 0$ $\sigma_e^2=\sigma_0^2$ (погрешности одинаковы, осреднение не дает эффекта). Таким образом, выигрыш в точности при увеличении T достигается за счет перехода от статистически зависимых к статистически независимым погрешностям измерений. Однако, с другой стороны, если полезный сигнал непостоянен, то увеличение T приводит к увеличению составляющей дисперсии погрешности интерполяции, зависящей только от полезного сигнала.

При определенных условиях между этими тенденциями может быть найден компромисс. Очевидно, что оптимальное значение должно быть больше времени корреляции погрешности измерения и меньше времени корреляции полезного сигнала. Если различие времен корреляции недостаточно велико, то минимум может не существовать.

3. Будем считать заданным порядок интерполяции (число используемых дискретных значений) и найдем одновременно оптимальные коэффициенты интерполяции a_i и оптимальное значение T.

Зададимся степенью интерполяционного полинома $2N-1$; тогда количество используемых значений будет равно $2N$ и алгоритм интерполяции можно представить выражением

$$y\,[\varepsilon T]=\sum_{-N+1}^{N}a_i\,(\varepsilon,\ T)\,x\,(i\,T),\tag{1}$$

где $a_i(\varepsilon,T)$ — весовые коэффициенты, зависящие в общем случае как от интервала дискретизации T, так и от относительного момента времени $\varepsilon(0\leqslant\varepsilon<1)$.

Дисперсия погрешности интерполяции в этом случае имеет вид

$$\sigma_e^2\,[\varepsilon,\ a_i,\ T]=\sum_{i,j=-N+1}^{N}\sum a_i\,a_j\,R_{ss}\,[(i-j)\,T]+R_{ss}\,[0]-$$
$$-2\sum_{i=-N+1}^{N}a_i\,R_{ss}\,[(i-\varepsilon)\,T]+\sum_{i,j=-N+1}^{N}\sum a_i\,a_j\,R_{nn}\,[(i-j)\,T].\tag{2}$$

Определение весовых коэффициентов a_i производится из системы $2N$ уравнений

$$\frac{\partial\sigma_e^2}{\partial a_i}=0\quad(i=-N+1,\ldots,0,1,\ldots,N)\tag{3}$$

или

$$\sum_{i=-(N-1)}^{N}a_i\,[\varepsilon,\ T]\,\{R_{ss}\,[(i-j)\,T]+R_{nn}\,[(i-j)\,T]\}=$$
$$=R_{ss}\,[(j-\varepsilon)\,T]\quad(j=-N+1,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ N).\tag{4}$$

Так как одновременно производится оптимизация по интервалу дискретизации, то к системе (4) следует прибавить еще одно уравнение

$$\frac{\partial \sigma_e^2}{\partial T} = 0. \tag{5}$$

При этом следует отметить, что так как на коэффициенты a_i никаких ограничений не накладывается, то автономная система (4) всегда имеет решение

$$a_i = a_i(T). \tag{6}$$

Однако оптимальный интервал T может быть либо равен нулю (это получается, например, если погрешностью измерения можно пренебречь), либо больше нуля.

При достаточно больших T (если полезный сигнал непостоянен) дисперсия погрешности интерполяции всегда растет с увеличением T. Поэтому если

$$\left.\frac{\partial \sigma_e^2}{\partial T}\right|_{T \to 0} < 0,$$

то $T_{\text{опт}}$ существует, если же

$$\left.\frac{\partial \sigma_e^2}{\partial T}\right|_{T \to 0} > 0,$$

то оптимальным является $T = 0$.

В первом случае при увеличении T превалирует выигрыш от уменьшения статистической зависимости погрешностей дискретных данных (последняя группа слагаемых в выражении (2) убывает с увеличением T быстрее, чем растут три первые группы); во втором — основным является проигрыш от непостоянства полезного сигнала (три первые группы растут быстрее, чем убывает последняя).

Интересно оценить возможные пределы выигрыша в точности при увеличении T. С уменьшением T статистическая зависимость погрешностей измерения возрастает, при $T \to 0$ они становятся одинаковыми. Тогда составляющая дисперсии погрешности интерполяции D_1 на середине интервала при $T \to 0$ стремится к

$$\sigma_0^2 \left(\sum_{-N+1}^{N} a_i \right)^2. \tag{7}$$

При достаточно больших значениях T, когда погрешности становятся статистически независимыми, получаем

$$D_2 \Big|_{T \to \infty} \to \sigma_0^2 \left(\sum a_i^2 \right). \tag{8}$$

Разность $D_1 - D_2$ является оценкой достижимого увеличения точности. Для известных простейших способов интерполяции получаем следующее:

для линейной интерполяции

$$D_1 - D_2 = 0{,}5\, \sigma_0^2; \tag{9}$$

для кубичной интерполяции

$$D_1 - D_2 \simeq 0{,}64\, \sigma_0^2. \tag{10}$$

Интересно отметить, что оптимальные весовые коэффициенты a_i, определяемые из системы уравнений (4), (5) в случае, если дисперсия погрешности измерения мала по сравнению с дисперсией полезного сигнала, зависят в основном от статистических свойств восстанавливаемого сигнала, т. е. от $R_{ss}(\tau)$.

4. Очевидно, что в общем случае найденное из системы (4), (5) значение $T_{\text{опт}}$ является функцией ε. Поэтому при интерполяции на всем интервале следует предварительно определять осредненный на [0, 1] средний квадрат ошибки

$$\tilde{\sigma}_e^2(a_i, T) = \int\limits_0^1 \sigma_e^2(\varepsilon, a_i, T)\, d\varepsilon, \tag{11}$$

а затем уже решать уравнение (5) для $\tilde{\sigma}_e^2$.

В ряде случаев ставится задача искусственного «удвоения» частоты опроса. Тогда в полученное выражение $T_{\text{опт}} = T(\varepsilon)$ следует подставить $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и найденное решение можно рассматривать как оптимальную интерполяцию на середину интервала.

Следует еще раз отметить, что существование $T_{\text{опт}} > 0$ обусловлено тем, что мы разыскиваем алгоритм интерполяции не на всем классе функций, а ограничиваемся функциями вида (1), где N — фиксированная величина. В противном случае, безусловно, $T_{\text{опт}} = 0$. Тем не менее в инженерной практике интерполяция осуществляется, как правило, именно функциями вида (1), поэтому нахождение оптимальных коэффициентов интерполяции и интервала дискретизации представляется целесообразным.

5. В заключение рассмотрим случай интерполяции по двум соседним дискретным значениям. Система уравнений (4) и (5) имеет вид:

$$\begin{cases} a_0 R_{xx}[0] + a_1 R_{xx}[T] = R_{ss}[\varepsilon T]; \\ a_0 R_{xx}[T] + a_1 R_{xx}[0] = R_{ss}[(1-\varepsilon) T]; \\ \dfrac{\partial \sigma_e^2}{\partial T} = 0, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$R_{xx}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau); \quad \sigma_e^2 = 2a_0 a_1 R_{xx}[T] + R_{xx}[0] a_0^2 +$$
$$+ a_1^2 R_{xx}[0] + R_{ss}[0] - 2a_0 R_{ss}[\varepsilon T] - 2a_1 R_{ss}[(1-\varepsilon) T].$$

Из (12) следует:

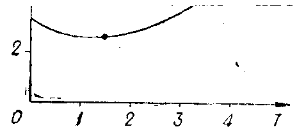
$$a_0 = \frac{R_{ss}[\varepsilon T] R_{xx}[0] - R_{ss}[(1-\varepsilon) T] R_{xx}[T]}{R_{xx}^2[0] - R_{xx}^2[T]};$$

$$a_1 = \frac{R_{ss}[(1-\varepsilon) T] R_{xx}[0] - R_{ss}[\varepsilon T] R_{xx}[T]}{R_{xx}^2[0] - R_{xx}^2[T]}. \tag{13}$$

Примем, что $R_{ss} = A^2 e^{-\alpha|\tau|}$, $R_{nn} = B^2 e^{-\beta|\tau|}$ и для простоты рассмотрим случай «удвоения» частоты опроса, т. е. положим, что $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда

$$a_0 = a_1 = \frac{A^2}{2(A^2 + B^2)}. \tag{14}$$

На рисунке приведен график зависимости дисперсии погрешности ражения, получаем, что $\frac{1}{2} < \frac{\sigma^2_{e\,\text{опт}}}{\sigma^2_{e0}} < 1$. Этот результат соответствует предельной оценке, данной в п. 3.



ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Гончаров. Теория приближения функций. М., Гостехиздат, 1937.
2. Ю. Л. Розов, И. Б. Челпанов. О погрешности интерполяции по дискретным данным.— Измерительная техника, 1968, № 2.

Поступила в редакцию 9 июня 1967 г., окончательный вариант — 3 ноября 1967 г.