А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1968

УДК 681.142.621 (083.73)

О. Н. ДЕГТЯРЕВ
(Одесса)

ОБ ОДНОЙ ГРУППЕ КОДОВЫХ КОЛЕЦ ДЛЯ ДВОИЧНО-ДЕСЯТИЧНЫХ ЦИФРАТОРОВ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Цифраторы перемещения, известные также как преобразователи типа «аналог-код», часто применяются в разнообразных системах программного управления и цифровой измерительной техники. Широкое распространение получили многоразрядные цифраторы, в которых использована двоично-десятичная система кодирования. Такой цифратор состоит из нескольких десятичных разрядов (чаще 3 или 4), каждый из которых выполняется в двоичном коде. Поскольку минимальная длина двоичного числа для кодирования десятичных цифр от 0 до 9 равна четырем, десятичный разряд цифратора должен содержать не менее четырех элементов считывания и в общем случае иметь четыре кодовые дорожки.

Уменьшение числа кодовых дорожек весьма целесообразно, так как при этом существенно упрощается конструкция цифратора.

Количество кодовых дорожек уменьшается до одной, если двоичный код десятичного разряда представлен кодовым кольцом. Известно, что кодовое множество, а также некоторые его части — подмножества — могут быть представлены кодовыми кольцами [1]. Кодовое множество полного число-позиционного кода содержит k^n (у нас $k = 2$, $n \geqslant 4$) кодов. Задача состоит в том, чтобы в кодовом множестве 2^n отыскать подмножества, состоящие из десяти кодов и могущие быть представленными кодовыми кольцами.

Будем рассматривать систему кодирования одного десятичного разряда как результат взаимодействия n элементов считывания, например щеток, с кодовой дорожкой, состоящей из m контактных ламелей и изолированных участков. Совместим с произвольно выбранной точкой отсчета одну щетку и одну контактную ламель, принимая их координаты соответственно $A=0$ и $a=0$. Тогда координатами остальных щеток будут B, C, D...—всего $n-1$ элементов, а координатами контактных ламелей b, c, d...— всего $m-1$ ламелей.

Обозначим величину квантования, равную 1/10 длины кодовой дорожки, δ. Если кодовая дорожка будет последовательно занимать положения, отличные друг от друга на δ, 2δ,..., 9δ, то элементы считывания зафиксируют десять «правильных» кодовых комбинаций, которые и составят систему кодирования. В промежуточных положениях кодовой дорожки будут считываться «ложные» кодовые комбинации.

Щетка и ламель участвуют в образовании правильной кодовой комбинации только в том случае, когда выполняется равенство (например, для щетки D и ламели C)

$$D=c+j\delta. \qquad (1)$$

Здесь j — число, показывающее, на сколько δ должна быть смещена кодовая дорожка, чтобы щетка D коснулась ламели c; $j=0,1,\dots, 9$.

Среди бесконечного многообразия расстановок щеток и ламелей выделим область расстановок, которая удовлетворяет следующему требованию: равенство (1) должно выполняться для каждой из m ламелей относительно каждой из n щеток.

Анализ показывает, что при синтезе систем кодирования выполнение данного требования позволяет получить кодовую дорожку с наименьшим числом ламелей, поскольку каждая из m ламелей участвует в образовании правильных кодовых комбинаций максимальное число раз n.

Рассмотрим подробнее выделенную область расстановок. Нетрудно видеть, что для любой расстановки такой области координаты щеток $B, C, D\dots$ и координаты ламелей $b, c, d\dots$ должны быть кратны величине квантования δ. Поскольку $\delta=\frac{1}{10}$, любую расстановку щеток или ламелей в данной области можно описывать десятизначными двоичными кодовыми комбинациями. Если, например, расстояние между соседними щетками одинаково, то им присваивается комбинация 1010101010 (первая и последняя щетки не являются соседними).

Система кодирования определяется кодовыми комбинациями щеток и дорожки и формируется следующим образом:

1) исходные кодовые комбинации щеток и дорожки подвергаются операции поразрядного логического умножения, причем в качестве результата умножения выбираются символы, противостоящие единичным символам кодовой комбинации щеток (например, если комбинация щеток 1010101010, а комбинация дорожки 1111000000, то результатом умножения будет кодовая комбинация 11000);

2) результат умножения — кодовая комбинация 11000 — запоминается;

3) к кодовой комбинации дорожки применяется циклическая подстановка, в результате чего место первого символа займет последний, место второго — первый и т. д.

4) операции поразрядного логического умножения подвергаются кодовая комбинация щеток и кодовая комбинация дорожки, измененная циклической подстановкой. Результатом этого умножения в нашем примере будет, очевидно, комбинация 01100.

Далее операции повторяются. Десять произведений, полученных в результате описанных операций, составят систему кодирования.

Выпишем способы расстановок для области, определенной выше. Для примера рассмотрим способы расстановок 4 элементов (щеток либо ламелей). Четыре элемента на десяти позициях могут быть расставлены 210 способами, так как число сочетаний из десяти по четыре — $C_{10}^{4}=210$. Каждому способу расстановки соответствует своя кодовая комбинация. Все кодовые комбинации разобьем на группы, выбранные таким образом, чтобы ни одна из комбинаций одной группы не могла быть преобразована в комбинацию другой группы с помощью циклической подстановки. Например, комбинации 1111000000 и 0011110000 принадлежат к одной группе, так как 1-я комбинация может быть преобразована во 2-ю двукратным применением циклической подстановки. Пример комбинаций из разных групп: 1111000000 и 111010000. Группу кодовых комбинаций будем представлять одной комбинацией, имеющей минимальный «вес» в данной группе. Например, комбинация 1111000000 может представлять свою группу, так как обладает наименьшим весом, равным 10 (вес комбинации составит сумма номеров позиций, на которых стоят 1).

Если бы любая из комбинаций при круговой циклической подстановке давала десять неповторяющихся комбинаций, то число групп подмножества C_{10}^4 составило бы, очевидно,

$$\frac{C_{10}^4}{10} = 21.$$

Существуют, однако, комбинации с симметричным расположением символов относительно геометрического центра. Такие комбинации при круговой циклической подстановке дают только $\frac{10}{p}$ комбинаций (p — порядок центра симметрии). Путем перебора можно установить, что подмножество C_{10}^4 содержит две комбинации 1100011000 и 1010010100, имеющие порядок симметрии $p=2$ и дающие при круговой циклической подстановке по $\frac{10}{2} = 5$ неповторяющихся комбинаций. Учитывая это, легко подсчитать, что число групп подмножества C_{10}^4 равно 22. Аналогично можно подсчитать число групп и для других подмножеств. Кодовые комбинации, представляющие группы подмножества $C_{10}^0, C_{10}^1, \ldots, C_{10}^{10}$, сведены в табл. 1.

Заметим, что кодовые комбинации следующих пар подмножеств инверсны: C_{10}^0 и C_{10}^{10}, C_{10}^1 и C_{10}^9, C_{10}^2 и C_{10}^8, C_{10}^3 и C_{10}^7, C_{10}^4 и C_{10}^6. Подмножество C_{10}^5 инверсно самому себе. Свойство инверсии означает, что любая комбинация из подмножества, например C_{10}^6, может быть получена из соответствующей комбинации подмножества C_{10}^4 путем замены 1 на 0 и наоборот. Число комбинаций в данном подмножестве и в подмножестве, инверсном данному, одинаково. Действительно, $C_{10}^0 = C_{10}^{10} = 1$; $C_{10}^1 = C_{10}^9 = 10$; $C_{10}^2 = C_{10}^8 = 45$; $C_{10}^3 = C_{10}^7 = 120$; $C_{10}^4 = C_{10}^6 = 210$; $C_{10}^5 = 252$.

Удовлетворительные системы кодирования можно обнаружить, проверяя взаимодействие кодовых комбинаций табл. 1. Система кодирования формируется, как указано выше, и признается удовлетворительной, если она состоит из десяти неповторяющихся комбинаций. Соответствующая работа перебора для обнаружения удовлетворительных кодовых колец была выполнена на электронной вычислительной машине 4- и 5-разрядных кодов, как наиболее целесообразных для применения в цифраторах. Результаты работы сведены в табл. 2 и 3, где крестиками отмечены номера кодовых комбинаций (в соответствии с табл. 1), отвечающие удовлетворительным системам кодирования, т. е. кодовым кольцам. Табл. 2 и 3 действительны также для кодовых дорожек, описываемых подмножествами, инверсными табличным. Это значит, что вместо C_{10}^3 или C_{10}^4 можно соответственно читать C_{10}^7 или C_{10}^6. Системы кодирования для инверсных подмножеств получаются из исходных путем замены 1 на 0 и 0 на 1.

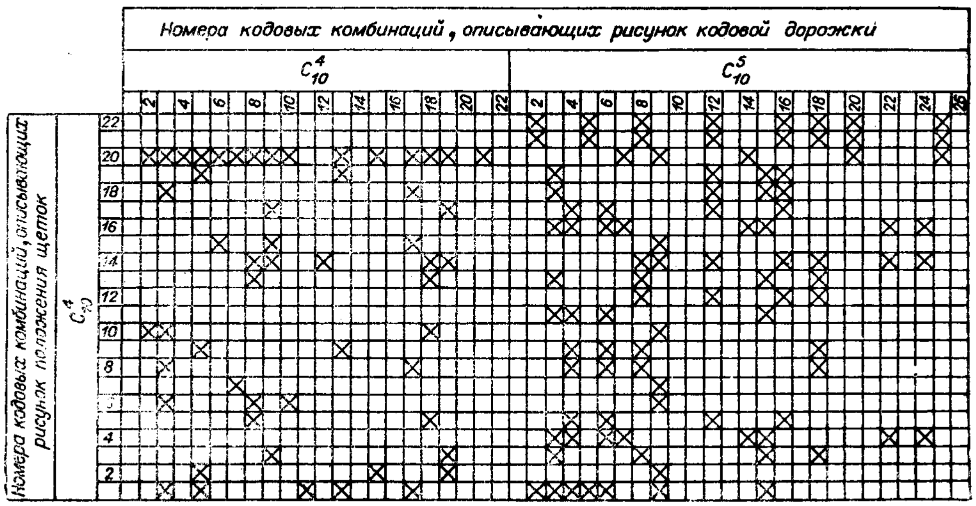
Табл. 2 содержит 54 кодовых кольца, образованных на кодовых дорожках подмножества C_{10}^4, и 96 колец, образованных на дорожках подмножества C_{10}^5. Прибавив к ним 54 инверсных кольца, образованных на дорожках подмножества C_{10}^6, получим всего 204 кодовых кольца.

Таблица 1

Кодовые комбинации, представляющие группы подмножеств C_{10}^{0}, C_{10}^{1}, C_{10}^{2}, . . . , C_{10}^{9}, C_{10}^{10}

Номер комбинации	C_{10}^{0}	C_{10}^{1}	C_{10}^{2}	C_{10}^{3}	C_{10}^{4}	C_{10}^{5}	C_{10}^{6}	C_{10}^{7}	C_{10}^{8}	C_{10}^{9}	C_{10}^{10}
1	0000000000	1000000000	1100000000	1110000000	1111000000	1111100000	1111110000	1111111000	1111111100	1111111110	1111111111
2			1010000000	1101000000	1110100000	1111010000	1111101000	1111110100	1111111010		
3			1001000000	1100100000	1110010000	1111001000	1111011000	1111101100	1111110110		
4			1000100000	1100010000	1110001000	1111000100	1110111000	1111011100	1111101110		
5			1000010000	1100001000	1110000100	1111000010	1101111000	1110111100	1111011110		
6				1100000100	1110000010	1110110000	1011111000	1101111100			
7				1100000010	1101100000	1110101000	1111100100	1011111100			
8				1010100000	1101010000	1110100100	1111010100	1111101010			
9				1010010000	1101000100	1110100010	1110110100	1110110100			
10				1010001000	1101000100	1110011000	1101110100	1110111010			
11				1010000100	1101000010	1110010100	1011110100	1101111010			
12				1001001000	1100110000	1110010010	1111001100	1110110110			
13					1100101000	1110001100	1110101100				
14					1100100100	1110001010	1101101100				
15					1100100010	1110000110	1011101100				
16					1100011000	1101101000	1110011100				
17					1100010100	1101100100	1101011100				
18					1100010010	1101100010	1011011100				
19					1100001010	1101011000	1010111100				
20					1010101000	1101010100	1110101010				
21					1010100100	1101010010	1101101010				
22					1010010100	1101001100	1101011010				
23						1101001010					
24						1100110010					
25						1100101010					
26						1010101010					

Таблица 2



Поскольку десятичной цифре может быть приписана любая из 10 комбинаций кодового кольца, общее число 4-разрядных систем кодирования составит 2040. Из табл. 3 для кодовых дорожек подмножеств C_{10}^3, C_{10}^4, C_{10}^5, C_{10}^6, C_{10}^7 имеем соответственно 57, 270, 333, 270, 57 кодовых колец. В итоге получим 87 кодовых колец, или 98705-разрядных систем кодирования.

Особый интерес среди 5-разрядных кодовых колец представляют кольца, обладающие свойствами одноперeменности (коды Грея) и двупеременности (коды «2 из 5»). Из одноперeменных кодов, приведенных в табл. 4, в литературе описан только код 1-го столбца, обнаруженный Либау и Крейгом [2]. Наиболее целесообразным следует признать код 4-го столбца, отвечающий простому рисунку кодовой дорожки и имеющий низкое среднее число единичных символов.

Коды «2 из 5», приведенные в табл. 5, были получены ранее [3], но

Таблица 3

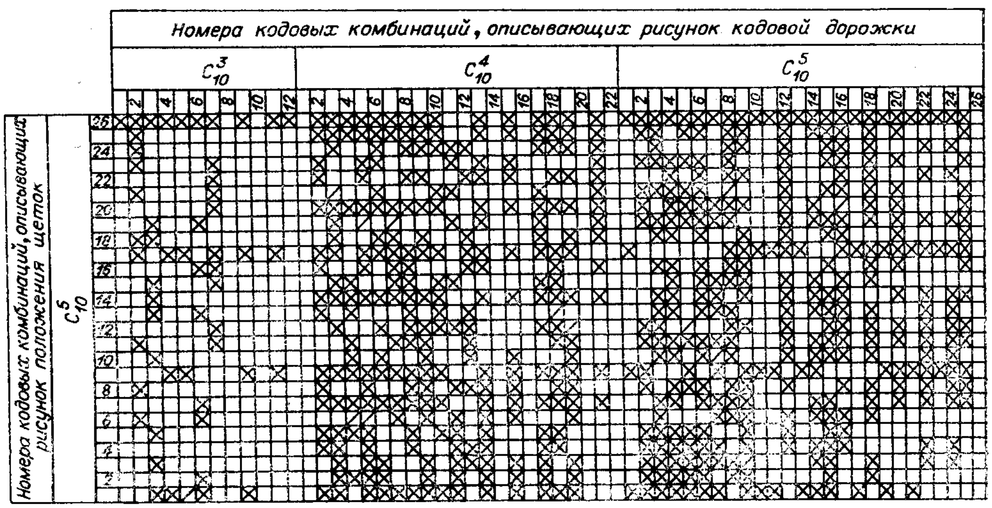


Таблица 4

Однопеременные кольцевые коды

Комбинация рисунка щеток		1111100000	1110100010	1101100100	1010101010	
Десятичные цифры	1	00001	10001	10001	10001	10011
	2	00011	11001	11001	10000	10001
	3	00111	11101	11000	11000	11001
	4	01111	11100	11100	01000	11000
	5	11111	11110	11110	01100	11100
	6	11110	01110	01110	00100	01100
	7	11100	00110	00110	00110	01110
	8	11000	00010	00111	00010	00110
	9	10000	00011	00011	00011	00111

Таблица 5

Кольцевые коды „2 из 5“

Комбинация рисунка щеток		1010101010				
Комбинация рисунка дорожки		1101100000	1110010000	1110000100	1101001000	1100010010
Десятичные цифры	0	11000	11000	11000	11000	11000
	1	10100	01010	01001	10010	00101
	2	01100	01100	01100	01100	01100
	3	01010	00101	10100	01001	10010
	4	00110	00110	00110	00110	00110
	5	00101	10010	01010	10100	01001
	6	00011	00011	00011	00011	00011
	7	10010	01001	00101	01010	10100
	8	10001	10001	10001	10001	10001
	9	01001	10100	10010	00101	01010

другим способом, мало пригодным для исследования больших групп кодовых колец.

Описанный способ получения кодовых колец может оказаться эффективным при исследовании разнообразных групп кодовых колец.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Радченко. Кодовые кольца как способ представления кодовых множеств.— Автоматика и телемеханика, 1959, № 7.
2. W. H. Libow and L. I. Craig. Photoelectric Decimal-Coded Shaft Digitizer.— Trans. of IRE, 1953, EC-2, № 9.
3. Ф. Я. Галкин. Об арифметических возможностях кода «2 из 5».— ИВУЗ, Приборостроение, 1965, т. VIII, № 6.

Поступила в редакцию
26 июня 1967 г.,
окончательный вариант —
16 октября 1967 г.