АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1968

ЦИФРОВЫЕ ПРИБОРЫ И УСТРОЙСТВА

УДК 621.3.088+681.142.62

С. Я. АВРАМЕНКО
(Ленинград)

О ПОГРЕШНОСТИ РАЗВЕРТЫВАЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПРЕОБРАЗУЕМОГО СИГНАЛА

Любой подвергаемый развертывающему преобразованию [1] реальный сигнал $u(t)$ можно представить в виде суммы двух составляющих

$$u(t)=u_0(t)+\xi(t), \tag{1}$$

где $u_0(t)$ — детерминированная функция времени; $\xi(t)$ — случайный процесс. Будем считать $\xi(t)$ помехой. Погрешность преобразования сигнала (1) за счет $\xi(t)$ можно охарактеризовать функцией распределения $F(t)$ момента первой встречи развертки kt с $u(t)$ (рис. 1, *а*). Ее определение идентично задаче нахождения функции распределения первого достижения процессом

$$kt-u_0(t)+\xi(t)$$

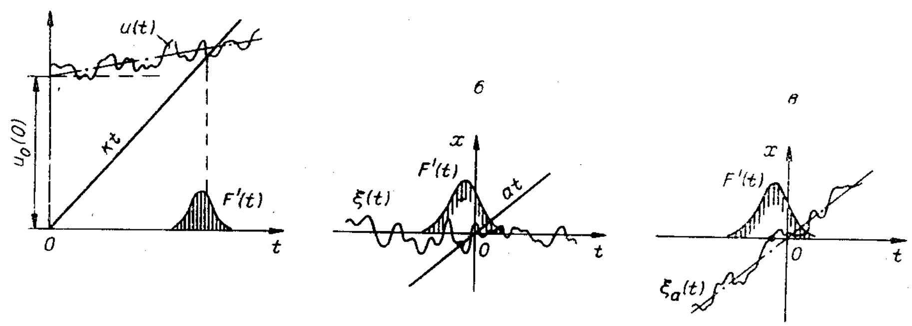

Рис. 1. Развертывающее преобразование случайного процесса линейной разверткой (общий вид) *(а)*; упрощенная картина развертывающего преобразования случайного процесса $\xi(t)$ *(б)*; эквивалентная картина пересечения случайным процессом $\xi_a(t)$ нулевого уровня *(в)*.

нулевого уровня. Последняя задача имеет точное решение только для непрерывных марковских процессов [2]. Для немарковских же процессов, с которыми обычно имеют дело на практике, удовлетворительного решения этой задачи пока не дано.

В настоящей статье находится приближенное аналитическое выражение функции распределения $F(t)$ для линейного развертывающего преобразования при следующих допущениях:

1) $\xi(t)$ — немарковский нормальный стационарный центрированный случайный процесс;

2) в течение периода развертывающего преобразования $u_0(t)$ изменяется приблизительно по линейному закону; это предположение позволяет свести задачу к рассмотрению преобразования разверткой $[k - u_0'(0)]\, t$ случайного процесса с математическим ожиданием $u_0(0)$; не нарушая общности задачи, положим $u_0(0)=0$; обозначим также $k - u_0'(0) = a$;

3) отношение a/σ_y, где σ_y — среднеквадратическое отклонение производной $y = \frac{d\xi}{dt}$, невелико, так что первое пересечение развертки с $u(t)$ происходит в диапазоне больших отклонений $\xi(t)$ (бо́льших среднеквадратического).

Таким образом, поставленная задача сводится к отысканию приближенного выражения, функции распределения $F(t)$ момента первой встречи развертки at с центрированным случайным процессом $\xi(t)$, ордината которого $x=\xi(t)$ имеет распределение

$$w_x = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}},$$

где σ_x —среднеквадратическое отклонение ординаты $\xi(t)$ (см. рис. 1, *б*). Для удобства рассмотрим эквивалентную картину пересечения нулевого уровня случайным процессом $\xi_a(t)$, ордината которого имеет распределение

$$w_x(t) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-at)^2}{2\sigma_x^2}} \quad \text{(см. рис. 1, в)}, \tag{2}$$

и найдем функцию распределения $F(t)$ момента первого достижения этим процессом нулевого уровня. Время до пересечения разверткой at нулевого уровня здесь и в дальнейшем будем считать отрицательным.

Пусть A — событие, состоящее в том, что случайный процесс $\xi_a(t)$ не пересек нулевого уровня до момента t, B — событие, представляющее собой первое достижение процессом $\xi_a(t)$ нулевого уровня на интервале $(t, t+dt)$. Так как событие B может произойти только совместно с событием A, то по формуле условной вероятности

$$P(B)=P(A)\,P(B/A), \tag{3}$$

где $P(B/A)$ — вероятность того, что на интервале $(t, t+dt)$ произойдет пересечение нулевого уровня процессом $\xi_a(t)$ при условии отсутствия пересечения до момента t.

Вероятности $P(A)$ и $P(B)$ можно выразить через искомую функцию распределения:

$$P(A)=1-F(t); \tag{4}$$

$$P(B)=F'(t)dt. \tag{5}$$

Выразим также $P(B/A)$ через неизвестную пока временную плотность вероятности $\varphi(t)$ пересечения нулевого уровня процессом $\xi_a(t)$ при условии непересечения этого уровня к данному моменту

$$P(B/A)=\varphi(t)dt. \tag{6}$$

Подставляя (4), (5) и (6) в (3), имеем

$$F'(t)=[1-F(t)]\varphi(t).$$

Интегрируем это линейное дифференциальное уравнение, учитывая $F(-\infty)=0$:

$$F(t) = 1 - e^{-\int\limits_{-\infty}^{t} \varphi(t)\,dt}. \qquad (7)$$

Временная плотность вероятности пересечений случайным процессом уровня x_0 снизу вверх выражается известной формулой [2]:

$$p(x_0, t) = \int\limits_0^{\infty} y\, w_2(x_0, y, t)\, dy, \qquad (8)$$

где $w_2(x, y, t)$ — двумерная плотность распределения ординаты x и производной y случайного процесса в совпадающий момент времени t. Для нашего случайного процесса $\xi_a(t)$ имеем [3]

$$w_2(x, y, t) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-at)^2}{2\sigma_x^2}}\, \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma_y^2}}. \qquad (8а)$$

Выражение для $\varphi(t)$ можно получить из формулы (8), если положить в ней $x_0=0$ и подставить двумерную плотность

$$w_2(x, y, t / \xi_a < 0), \qquad (9)$$

вычисленную с учетом непересечения процессом $\xi_a(t)$ нулевого уровня на интервале $(-\infty, t)$. Последнее требует в общем случае учета бесконечномерной функции распределения ординат случайного процесса, определяемой при нормальном процессе всеми точками его корреляционной функции. Трудность точного определения (9) очевидна. Сделанное нами допущение (2) позволяет получить для (9) приближенное выражение.

Временна́я плотность вероятности пересечений уровня x_0 снизу вверх (выбросов за уровень x_0) $p(x_0, t)$ в диапазоне больших отклонений случайного процесса мала, и с приемлемой для статистических методов точностью считают, что при $|x| > \sigma_x$ число выбросов на некотором заданном интервале времени подчиняется закону Пуассона, причем $p(x_0, t)$ играет роль мгновенной плотности пуассоновского потока выбросов. Такой подход, по существу, означает, что в данных условиях пренебрегают корреляционными связями.

Аналогичным образом на основании допущения 3 пренебрежем корреляционными связями при определении $w_2(x, y, t / \xi_a < 0)$, и тогда условие непересечения процессом $\xi_a(t)$ нулевого уровня на интервале $(-\infty, t)$ можно учесть единственно как условие ограничения уровнем $x_0=0$ одномерной плотности распределения ординаты процесса $\xi_a(t)$. Иными словами, в любой произвольный момент времени t до того, как произошло первое пересечение процессом $\xi_a(t)$ нулевого уровня, сечение этого процесса ограничивается уровнем $x_0=0$, причем часть сечения, лежащая ниже этого уровня, нормируется. В результате нормирования плотности распределения ординаты получаем из (8а)

$$w_2(x, y, t / \xi_a < 0) \simeq \frac{2e^{-\frac{(x-at)^2}{2\sigma_x^2}}}{\sigma_x \sqrt{2\pi}\left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma_x \sqrt{2}}\, t\right)\right]}\, \frac{e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma_y^2}}}{\sigma_y \sqrt{2\pi}}, \qquad (10)$$

$$\varphi(t) = \frac{K}{1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma_x \sqrt{2}}\, t\right)}\, e^{-\frac{a^2 t^2}{2\sigma_x^2}}, \tag{11}$$

где

$$K = \frac{\sigma_y}{\pi \sigma_x}\, e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}} + \frac{a}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left[1 + \Phi\left(\frac{a}{\sigma_y \sqrt{2}}\right)\right].$$

Подставляем (11) в (7), и, замечая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \frac{e^{-\frac{a^2 t^2}{2\sigma_x^2}}}{1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma_x \sqrt{2}}\, t\right)}\, dt = \frac{\sigma_x}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{2}{1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma_x \sqrt{2}}\, t\right)},$$

после ряда преобразований получаем формулу для функции распределения момента встречи развертки at и случайного процесса $\xi(t)$

$$F(t) = \left[\frac{1 - \Phi(\alpha t)}{2}\right]^{K(\beta)}, \tag{12}$$

где

$$K(\beta) = \frac{1}{2\beta \sqrt{\pi}}\, e^{-\beta^2} + \frac{1}{2}\left[1 + \Phi(\beta)\right]; \quad \alpha = \frac{a}{\sigma_x \sqrt{2}}; \quad \beta = \frac{a}{\sigma_y \sqrt{2}}.$$

Входящие в (12) σ_x и σ_y легко определяются статистической обработкой случайного процесса $\xi(t)$, причем $\sigma_y = \sigma_x \sqrt{-r_t''(0)}$. Часто удобнее находить σ_y через $\bar{n}$ — среднее число переходов через нуль траектории $\xi(t)$ [2]: $\sigma_y = \bar{n}\, \pi \sigma_x$.

Как видно из (12), форма кривой распределения $F(t)$ определяется только значением β, тогда как α является масштабом времени. С помощью ЦВМ «Минск-2» на основе формулы (12) были рассчитаны кривые $F(\alpha t)$ и $F'(\alpha t)$ в широком диапазоне значений β $[0{,}003 \leqslant \beta \leqslant 10]$, а также вычислены математические ожидания m_β и среднеквадратические отклонения σ_β этих распределений (рис. 2).

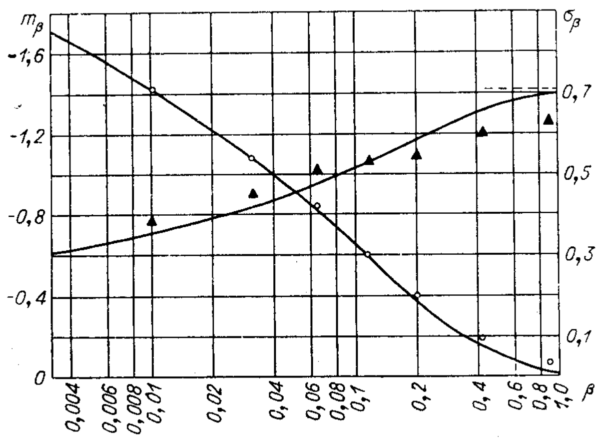

Рис. 2. Теоретические кривые и экспериментальные значения математических ожиданий m_β и среднеквадратических отклонений σ_β распределений $F(\alpha t)$.

В результате графической обработки реализации нормального случайного процесса с параметрами $\sigma_x = 3{,}46$, $\sigma_y = 6{,}10$ и корреляционной функцией, изображенной на рис. 3, были получены статистические распределения ($N=230$) момента встречи развертки и случайного процесса для ряда значений β. На рис. 4 эти распределения сопоставлены с соответствующими расчетными кривыми $F'(\alpha t)$; на рис. 2 кружками и треугольниками отмечены экспериментальные значения математических ожиданий и среднеквадратических отклонений.

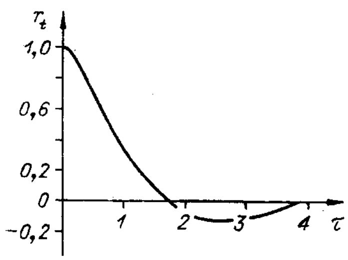

Рис. 3. Нормированная корреляционная функция случайного процесса $\xi(t)$, по реализации которого найдены статистические распределения $F(\alpha t)$.

Из сравнения экспериментальных и расчетных данных можно сделать вывод, что для нормальных случайных процессов, корреляционная функция которых содержит достаточно быстро затухающую колебательную составляющую (это имеет место у большинства флюктуационных шумов), формула (12) дает хорошее приближение функции распределения во всем диапазоне значений β.

Из рис. 4 видно, что допущение 3 в основном выполняется при $0<\beta<0{,}1$. Следовательно, в этом важном диапазоне значений β, когда функция распределения момента встречи развертки at и процесса $\xi(t)$ существенно отличается от нормальной, полученной линейным преобразованием с коэффициентом $1/a$ нормального закона распределения ординаты процесса $\xi(t)$, и особенно нуждается в уточнении, формула (12) вполне достоверна. При бо́льших значениях β оснований для такого утверждения не имеется, тем не менее и при $\beta>0{,}1$ формула (12) достаточно точно аппроксимирует искомую функцию распределения. Объясняется это, по-видимому, тем, что влияние корреляционных связей на $w_2(x, y, t\,/\,\xi_a < 0)$ с увеличением β возрастает постепенно. Количественный учет этого влияния в общем виде встречает значительные математические трудности, хотя для конкретных корреляционных функций процесса $\xi(t)$ приемлемый с практической точки зрения результат можно получить, например, методом опорных импульсов [2].

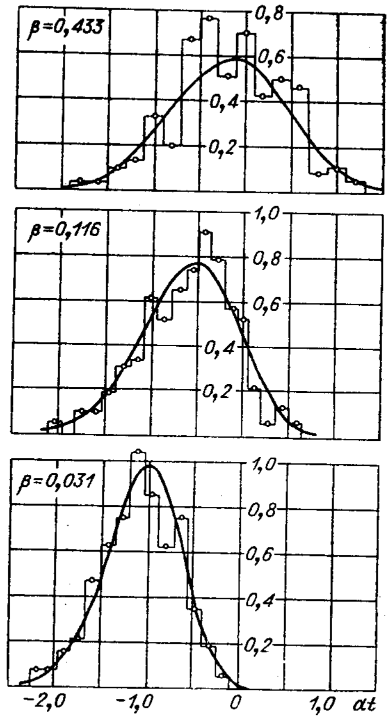

Рис. 4. Гистограммы статистических распределений момента встречи развертки и случайного процесса в сопоставлении с расчетными кривыми $F'(\alpha t)$.

Значения m_β и σ_β (см. рис. 2) позволяют оценить систематическую и случайную погрешности развертывающего преобразования нормального случайного процесса разверткой $at=[k-u'(0)]t$. Заметим, что для получения m_β и σ_β в единицах времени следует их значения по графикам рис. 2 делить на $\alpha = \dfrac{a}{\sigma_x\sqrt{2}}$.

Полученные результаты могут быть использованы также для анализа случайных погрешностей преобразователей напряжения в код со ступенчатой разверткой при малом отношении величины кванта к уровню шума [4].

Автор благодарен А. И. Солодовникову и В. М. Ефимову за ценные замечания, сделанные при просмотре рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Е. Темников. Теория развертывающих систем. М., Госэнергоиздат, 1963.
2. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Советское радио», 1966.
3. Д. Миддлтон. Введение в статистическую теорию связи, т. 1. М., «Советское радио», 1961.
4. Э. И. Гитис, А. Е. Меньших. Экспериментальное исследование случайных погрешностей преобразователя напряжения в код со ступенчатой разверткой.— Автометрия, 1966, № 2.

Поступила в редакцию
3 марта 1967 г.,
окончательный вариант —
23 октября 1967 г.