ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АВТОМЕТРИИ

УДК 681.142.82

В. В. ГУБАРЕВ

(Новосибирск)

ПОГРЕШНОСТИ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО И ЗНАКОВЫХ СПОСОБОВ ИЗМЕРЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИИ ПО ОГРАНИЧЕННЫМ ДАННЫМ

К настоящему времени известно немало работ, посвященных применению корреляционного анализа в различных областях науки и техники и описанию различных алгоритмов и приборов, предназначенных для вычисления оценок корреляционных функций (см., например, [1—4] и литературу в [1—4]). Вместе с тем лишь в немногих работах, например в 3, 5—11, приводится анализ погрешностей вычисления и то, как правило, для непосредственного* и отчасти для полярного алгоритмов; причем сравнения погрешностей различных алгоритмов не производится.

Цель настоящей статьи — на примере нормальных стационарных эргодических случайных процессов провести сравнительный анализ дисперсий оценок корреляционных функций, вычисляемых по ограниченным экспериментальным данным по непосредственному, релейному, полярному и цифро-полярному** алгоритмам при непрерывном и выборочном способах осреднения произведений.

ДИСПЕРСИЯ ОЦЕНОК АВТО- И ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

1. *Математическое ожидание оценок.* Для рассматриваемых алгоритмов выборочная оценка корреляционной функции стационарного эргодического случайного процесса в общем виде может быть представлена как

$$R^*_{f_1(\xi) f_2(\eta)}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(n \Delta t; \tau), \tag{1}$$

а непрерывная —

$$R^*_{f_1(\xi) f_2(\eta)}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \chi(t; \tau)\, dt, \tag{2}$$

---

* Часто употребляются термины: аналоговый, пропорциональный, амплитудный.

** Цифро-полярный алгоритм [4, 12] основан на использовании знака одного сигнала и квантованных по уровню значений другого.

где $\chi(t;\tau)=f_1[\xi(t)-M\{\xi(t)\}]f_2[\eta(t+\tau)-M\{\eta(t+\tau)\}]$; $f\,[x(t)]$ — нелинейное преобразование случайного процесса $x(t)$, определяемое способом дискретизации $x(t)$ по амплитуде; N — объем выборки — число осредняемых пар отсчетов; T — интервал осреднения; $\Delta t=\frac{T}{N}$ — интервал выборки; M — символ операции математического ожидания. В дальнейшем полагаем процессы центрированными, т. е.

$$M\{\xi(t)\}=M\{\eta(t)\}=0.$$

Применяя к (1) и (2) операцию математического ожидания и меняя местами суммирование и осреднение по множеству, получаем

$$M\{R^*_{f_1(\xi)\,f_2(\eta)}(\tau)\}=M\{\chi(t;\ \tau)\}=R_{f_1(\xi)\,f_2(\eta)}(\tau), \tag{3}$$

где $R_{f_1(\xi)\,f_2(\eta)}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция процессов $f_1[\xi(t)]$ и $f_2[\eta(t)]$. Для непосредственного, релейного и полярного алгоритмов вычисления оценок корреляционных функций нормальных центрированных стационарных эргодических случайных процессов имеем:

$$R_{\xi\eta}(\tau)=\sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta}(\tau); \tag{4}$$

$$R_{\xi\,\mathrm{sign}\,\eta}(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma_\xi\,\rho_{\xi\eta}(\tau); \tag{5}$$

$$R_{\mathrm{sign}\,\xi\,\mathrm{sign}\,\eta}(\tau)=\frac{2}{\pi}\arcsin\rho_{\xi\eta}(\tau). \tag{6}$$

Здесь σ_ξ — среднеквадратическое отклонение процесса $\xi(t)$; $\rho_{\xi\eta}(\tau)$ — коэффициент корреляции сигналов $\xi(t)$ и $\eta(t+\tau)$. Для цифро-полярного алгоритма $f_2[\eta(t+\tau)]=\mathrm{sing}\ \eta(t+\tau)$, $f_1[\xi(t)]=\xi_{\text{кв}}(t)=\xi(t)+\varepsilon(t)$, где $\xi_{\text{кв}}(t)$ — квантованные по уровню значения сигнала $\xi(t)$; $\varepsilon(t)=\varphi[\xi(t)]$ — шум квантования. Ограничиваясь рассмотрением только нормальных центрированных стационарных сигналов и наиболее целесообразных в этом случае квантователей с $c=q$, $d=0{,}5\,q$ и $c=0{,}5\,q$, $d=0$ (рис. 1), из [12] находим

$$R_{\xi_{\text{кв}}\mathrm{sign}\eta}(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma_\xi\,\rho_{\xi\eta}(\tau)\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\nu^k\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\frac{2\pi^2k^2}{\beta^2}\left[1-\rho^2_{\xi\eta}(\tau)\right]\right\}{}_1F_1\left\{1;\ \frac{3}{2};\ -\frac{2\pi^2k^2\rho^2_{\xi\eta}(\tau)}{\beta^2}\right\}\right]. \tag{7}$$

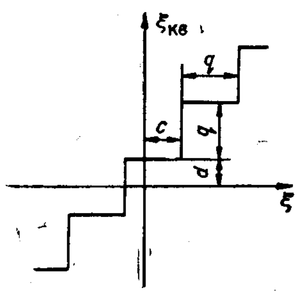

Рис. 1. Выходная характеристика квантователя по уровню.

Здесь $\beta=\frac{q}{\sigma_\xi}$ — относительный интервал квантования по уровню сигнала $\xi(t)$; ${}_1F_1\{a;\ b;\ x\}$ — вырожденная гипергеометрическая функция;

$$\nu=\begin{cases}-1 \text{ для квантователя } I \text{ с } c=0{,}5\,q;\ d=0;\\ +1 \text{ для квантователя } II \text{ с } c=q;\ d=0{,}5\,q.\end{cases}$$

Подробно функция (7) исследована в [12], где показано, что независимо от типа квантователя при $q\to 0$ цифро-полярная корреляционная функция (7) переходит в релейную (5), а с увеличением интервала квантования стремится к нулю при использовании квантователя I и к $\frac{q}{2}R_{\mathrm{sign}\,\xi\,\mathrm{sign}\,\eta}(\tau)$ при использовании квантователя II.

2. *Дисперсия оценок при некоррелированной выборке.* Легко показать, что дисперсия оценки цифро-полярной корреляционной функции при некоррелированной выборке равна

$$\sigma^2\,[R^*_{\xi_{\text{кв}}\,\text{sign}\,\eta}(\tau)] = \frac{1}{N}\,[\sigma^2_{\xi_{\text{кв}}} - R^2{}_{\xi_{\text{кв}}\,\text{sign}}(\tau)]. \tag{8}$$

Для рассматриваемых сигналов и квантователей

$$\sigma^2_{\xi_{\text{кв}}} = \sigma^2_{\xi}\left\{1 + \frac{\beta^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k\left(4 + \frac{\beta^2}{k^2\pi^2}\right)\exp\left[-\frac{2\pi^2 k^2}{\beta^2}\right]\right\}.$$

Из (8) предельным переходом $q \to 0 (\beta \to 0)$ для релейного алгоритма получаем

$$\sigma^2\,[R^*_{\xi\,\text{sign}\,\eta}(\tau)] = \frac{\sigma^2_{\xi}}{N}\left[1 - \frac{2}{\pi}\,\rho^2_{\xi\eta}(\tau)\right]. \tag{9}$$

При $\nu = +1$ $(c = q;\ d = 0{,}5\,q)$ и $(\beta \to \infty)$ для полярного алгоритма имеем

$$\sigma^2\,[R^*_{\text{sign}\,\xi\,\text{sign}\,\xi}(\tau)] = \lim_{\beta\to\infty} \frac{4}{\beta^2\sigma^2_{\xi}}\,\sigma^2\,[R^*_{\xi_{\text{кв}}\,\text{sign}\,\eta}(\tau)] =$$

$$= \frac{1}{N}\left\{1 - \left[\frac{2}{\pi}\arcsin\rho_{\xi\eta}(\tau)\right]^2\right\}. \tag{10}$$

Соотношения (9) и (10) могут быть получены также непосредственно [8]. Наконец, значение дисперсии оценки непосредственной корреляционной функции равно

$$\sigma^2\,[R^*_{\xi\eta}(\tau)] = \frac{\sigma^2_{\xi}\,\sigma^2_{\eta}}{N}\,[1 + \rho^2_{\xi\eta}(\tau)]. \tag{11}$$

Соотношения (8)—(11) пригодны как для авто-, так и для взаимных корреляционных функций и могут быть применены для определения нормированных $\delta_R(\tau)$ или относительных $\Delta_R(\tau)$ среднеквадратических погрешностей оценок корреляционных функций:

$$\delta_R(\tau) = \frac{\sigma\,[R^*_{f_1(\xi)\,f_2(\eta)}(\tau)]}{R_{f_1(\xi)\,f_2(\eta)}(\rho = 1)}; \tag{12}$$

$$\Delta_R(\tau) = \frac{\sigma\,[R^*_{f_1(\xi)\,f_2(\eta)}(\tau)]}{R_{f_1(\xi)\,f_2(\eta)}(\tau)}. \tag{13}$$

Для рассматриваемых алгоритмов зависимости $\delta^2_R(\tau)$ и $\Delta_R(\tau)$ от значений $\rho^{\xi}{}_{\eta}(\tau)$ приведены на рис. 2 и 3. Как следует из рисунков, при больших $\rho(\tau)$ оценки релейных, цифро-полярных и полярных корреляционных функций в среднем точнее оценок непосредственных, полученных вычислением по той же выборке. Однако увеличение точности получается за счет потери информации о мощности случайных процессов.

На рис. 2, *а* представлены кривые, изображающие степень изменения дисперсии оценки цифро-полярной корреляционной функции при изменении β. Как видно из рис. 2 и 3, при уменьшении β (увеличении числа уровней квантования в диапазоне изменения входного сигнала) дисперсия оценки цифро-полярной корреляционной функции приближается к дисперсии оценки релейной корреляционной функции независимо

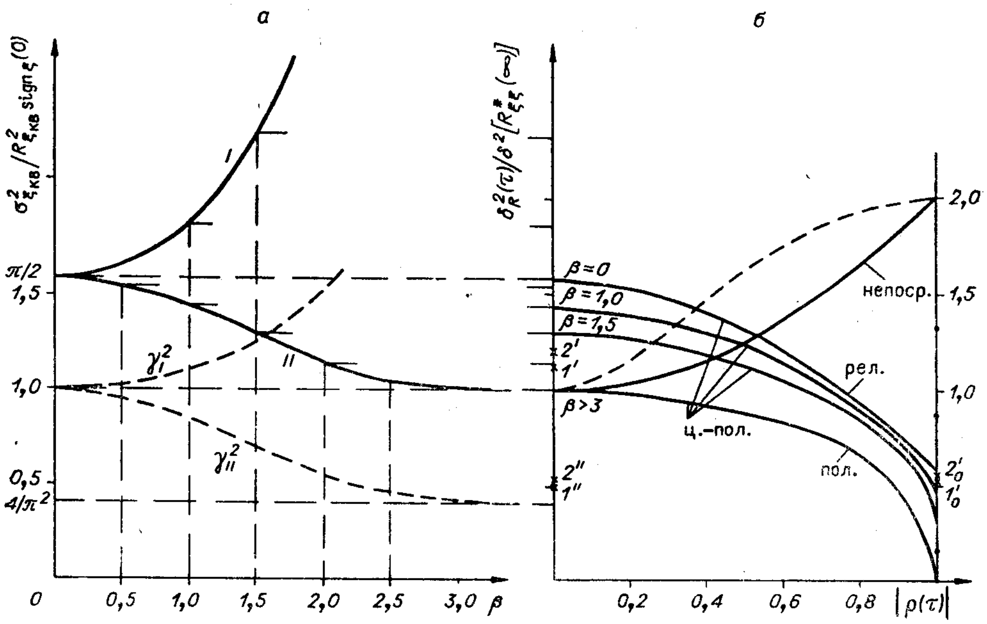

Рис. 2. Соотношение между нормированными дисперсиями оценок ненормированных корреляционных функций, получаемых осреднением некоррелированных парных выборок.

от типа квантователя. При больших β использование квантователя *I* приводит к резкому увеличению дисперсии, в то время как при использовании квантователя *II* нормированная дисперсия оценки цифро-полярной корреляционной функции ограничена и при увеличении β приближается к дисперсии оценки полярной корреляционной функции. Поведение нормированной дисперсии при произвольных β и $\rho(\tau)$ видно из рис. 2.

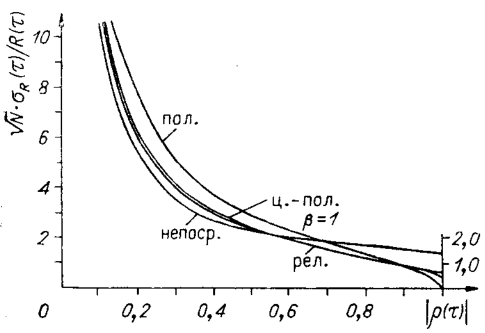

Рис. 3. Зависимость относительных среднеквадратических отклонений оценок ненормированных корреляционных функций от коэффициента корреляции.

3. *Дисперсия оценок при коррелированной выборке и при непрерывном алгоритме.* Согласно приложению 1, дисперсия общей оценки (1) равна

$$\sigma^2 [R^*_{f_1(\xi) f_2(\eta)}(\tau)] = \frac{1}{N}\Big[R_\chi(0;\tau) + 2\sum_{k=1}^{N-1}\Big(1-\frac{k}{N}\Big) R_\chi(k\,\Delta t;\tau)\Big], \quad (14)$$

где $R_\chi(\theta;\tau) = M\{\chi(t;\tau)\,\chi(t+\theta;\tau)\} - R^2_{f_1(\xi) f_2(\eta)}(\tau)$

— корреляционная функция процесса $\chi(t;\tau)$. Выражение $\sigma^2_R(\tau)$ для оценки (2), т. е. для непрерывного способа осреднения, может быть получено из (14), если при $N\Delta t = T = \mathrm{const}$ устремить Δt к нулю. Тогда умножая и деля (14) на Δt и переходя в пределе к интегралу, найдем

$$\sigma^2 [R^*_{f_1(\xi) f_2(\eta)}(\tau)]_{\text{непр}} = \frac{2}{T}\int_0^T \Big(1-\frac{\theta}{T}\Big) R_\chi(\theta;\tau)\, d\theta. \quad (15)$$

Как следует из приведенных ниже результатов, для получения приемлемых погрешностей вычисления оценок корреляционных функций необходимо выполнение условия $T \gg \tau_{\kappa\,\chi}$, где $\tau_{\kappa\,\chi}$ — время корреляции процесса $\chi(t)$, определяемое из условия $|\rho\,(\tau \geqslant \tau_{\kappa\,\chi})| \leqslant 0{,}05$. Поэтому вместо (15) можно без больших погрешностей использовать более удобную оценку дисперсии (15):

$$\sigma^2\,[R^*_{f_1(\xi)\,f_2(\eta)}(\tau)] \approx \frac{2}{T}\int\limits_0^\infty R_\chi(\theta;\ \tau)\,d\theta. \tag{16}$$

В общем виде найти выражение дисперсий (14) и (16) для релейного или полярного, а тем более для цифро-полярного алгоритмов затруднительно. Поэтому прежде всего остановимся на значениях $\sigma^2_R(\tau)$ для непрерывных релейного и полярного алгоритмов вычисления оценок автокорреляционных функций при $\tau=0$ и $\tau=\infty$. Первое из них может быть применено для оценки погрешностей вычисления оценок авто- и взаимных корреляционных функций при равных и близких к единице $\rho(\tau)$, второе — при τ, близких к $\tau_{\kappa\,\xi}$, т. е. при вычислении «хвоста» корреляционных функций.

Подставляя в (16) соответствующие значения $R_\chi(\theta;\ 0)$ и $R\ (\theta;\ \infty)$ (см. приложение 1) и производя деление на $R_{f_1(\xi)\,f_2(\xi)}(0)$, получим [8]:

для релейного непрерывного алгоритма

$$\delta^2\,[R^*_{\xi\,\mathrm{sign}\,\xi}(0)] = \frac{2}{T}\int\limits_0^\infty [\rho_{\xi\xi}(\theta)\ \arcsin\rho_{\xi\xi}(\theta) +$$

$$+\sqrt{1-\rho^2_{\xi\,\xi}(\theta)} - 1]\,d\theta = (0{,}5 \div 0{,}57)\,\frac{2}{T}\int\limits_0^\infty \rho^2_{\xi\xi}(\theta)\,d\theta; \tag{17а}$$

$$\delta^2\,[R^*_{\xi\,\mathrm{sign}\,\xi}(\infty)] = \frac{2}{T}\int\limits_0^\infty \rho_{\xi\xi}(\theta)\arcsin\rho_{\xi\xi}(\theta)\,d\theta = (1 \div 1{,}57)\,\frac{2}{T}\int\limits_0^\infty \rho^2_{\xi\xi}(\theta)\,d\theta; \tag{17б}$$

для полярного непрерывного алгоритма

$$\delta^2\,[R^*_{\mathrm{sign}\,\xi\ \mathrm{sign}\,\xi}(0)] = 0; \tag{18а}$$

$$\delta^2\,[R^*_{\mathrm{sign}\,\xi\ \mathrm{sign}\,\xi}(\infty)] = \frac{2}{T}\int\limits_0^\infty \Big[\frac{2}{\pi}\arcsin\rho_{\xi\xi}(\theta)\Big]^2 d\theta =$$

$$= (0{,}405 \div 1)\,\frac{2}{T}\int\limits_0^\infty \rho^2_{\xi\xi}(\theta)\,d\theta; \tag{18б}$$

для цифро-полярного алгоритма

$$\sigma^2\,[R^*_{\xi_{\text{кв}}\,\mathrm{sign}\,\xi}(\infty)] = \frac{1}{R^2_{\xi_{\text{кв}}\,\mathrm{sign}\,\xi}(0)}\,\frac{2}{T}\int\limits_0^\infty R_{\xi_{\text{кв}}\,\xi_{\text{кв}}}(\theta)\ \times$$

$$\times R_{\mathrm{sign}\,\xi\,\mathrm{sign}\,\xi}(\theta)\,d\theta = \left[\gamma^2 \div \frac{\sigma^2_{\xi_{\text{кв}}}}{R^2_{\xi_{\text{кв}}\,\mathrm{sign}\,\xi}(0)}\right]\frac{2}{T}\int\limits_0^\infty \rho^2_{\xi\xi}(\theta)\,d\theta; \tag{19}$$

$$R_{\xi_{\text{кв}}\xi_{\text{кв}}}(\theta) = \sigma_\xi^2 \Big\{ 1 + 4\rho_{\xi\xi}(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \exp\Big\{-\frac{2\pi^2 k^2}{\beta^2}\Big\} -$$

$$+ \frac{\beta^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^{k+n}}{kn} \exp\Big\{-\frac{2\pi^2 (k^2+n^2)}{\beta^2}\Big\} \operatorname{sh} \frac{4\pi^2 k n \rho_{\xi\xi}(\theta)}{\beta^2}\Big\},$$

где

$$\gamma = \frac{R_{\xi \operatorname{sign} \xi}(0)}{R_{\xi_{\text{кв}} \operatorname{sign} \xi}(0)} \Big[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \exp\Big\{-\frac{2\pi^2 k^2}{\beta^2}\Big\}\Big]. \qquad (20)$$

Вид кривой γ^2 в функции от β представлен на рис. 2, *а* штриховой линией.

Конечный результат в (17)—(19) указывает диапазон, в котором может находиться $\delta_R^2(0)$ или $\delta_R^2(\infty)$ при определенной зависимости $\rho(\tau)$. В качестве примера на рис. 2, *б* отображены значения дисперсий, определенных по точным формулам из (17), (18) для корреляционных функций $\rho_1(\tau) = \exp\{-\alpha|\tau|\}$, $\rho_2(\tau) = \exp\{-(\alpha\tau)^2\}$.

Сравним (17)—(19) с соответствующими значениями нормированной дисперсии непосредственного непрерывного алгоритма [5, 6, 8]:

$$\delta^2 [R^*_{\xi\xi}(\tau)] \approx \frac{2}{T} \int_0^{\infty} [\rho^2_{\xi\xi}(\theta) + \rho_{\xi\xi}(\theta+\tau)\, \rho_{\xi\xi}(\theta-\tau)]\, d\theta; \qquad (21)$$

$$\delta^2 [R^*_{\xi\xi}(0)] \approx \frac{4}{T} \int_0^{\infty} \rho^2_{\xi\xi}(\theta)\, d\theta; \qquad (22)$$

$$\delta^2 [R^*_{\xi\xi}(\infty)] \approx \frac{2}{T} \int_0^{\infty} \rho^2_{\xi\xi}(\theta)\, d\theta. \qquad (23)$$

Из (17)—(23) и рис. 2, *б* видно, что значения кривых при $\rho(0)=1$ и $\rho(\infty)=0$ можно считать оценкой сверху для соответствующих значений дисперсий при непрерывном алгоритме. При этом $\delta^2[R^*_{\xi\xi}(\infty)]$ определяется соотношением (23). Поведение нормированных дисперсий непрерывных оценок при произвольных значениях $\rho(\tau)$, вообще говоря, отличается от поведения кривых рис. 2, *б* и зависит от вида функции $\rho(\tau)$. Так, например, для непосредственного алгоритма кривая рис. 2, *б* полностью совпадает с соответствующей кривой при $\rho(\tau) = \exp\{-(\alpha\tau)^2\}$ и изображает оценку сверху для дисперсии оценки корреляционной функции $R(\tau) = R(0)\exp\{-(\alpha\tau)^2\}\cos\omega\tau$, в то время как для корреляционной функции $R(\tau) = R(0)\exp\{-\alpha|\tau|\}$ кривая располагается выше (см. штриховую кривую рис. 2, *б*) и изображает оценку сверху для дисперсии оценок корреляционной функции $R(\tau) = R(0)\exp\{-\alpha|\tau|\}\cos\omega\tau$. Вывод о том, что дисперсии оценок колебательно-затухающих корреляционных функций не превышают дисперсий оценок огибающих, непосредственно явствует из (21). В общем случае при любых $\rho(\tau)$ для дисперсии при непосредственном алгоритме существует оценка сверху, определяемая соотношением (22) [6]. Для релейного, полярного и цифро-полярного алгоритма в качестве такой оценки можно принять большие значения правой части соответственно из (17)—(19). Из (17)—(23) видно, что при непрерывном осреднении относительные дисперсии оценок знаковых функций могут быть в среднем по кривой меньше относительных дисперсий оценок непосредственной функции.

Теперь рассмотрим степень сходимости выборочного алгоритма к непрерывному и влияние коррелированности выборки на величину дисперсии. Данный анализ можно провести непосредственным подсчетом дисперсии выборочной оценки по формуле (14) для каждого из рассматриваемых алгоритмов. Необходимые выражения для $R_x(\theta;\ \tau)$ приведены в приложении 1. Однако, учитывая связь дисперсий релейного, цифро-полярного и полярного алгоритмов с дисперсией непосредственного алгоритма (17)—(23), основанную на связи между соответствующими функциями $R_x(\theta;\ \tau)$, можно весь анализ провести по непосредственному алгоритму.

Необходимые зависимости между дисперсиями непосредственных оценок некоторых корреляционных функций представлены на рис. 4. Правда, кривые рис. 4 строго справедливы лишь для $\tau=0$ и $\tau=\infty$, но с

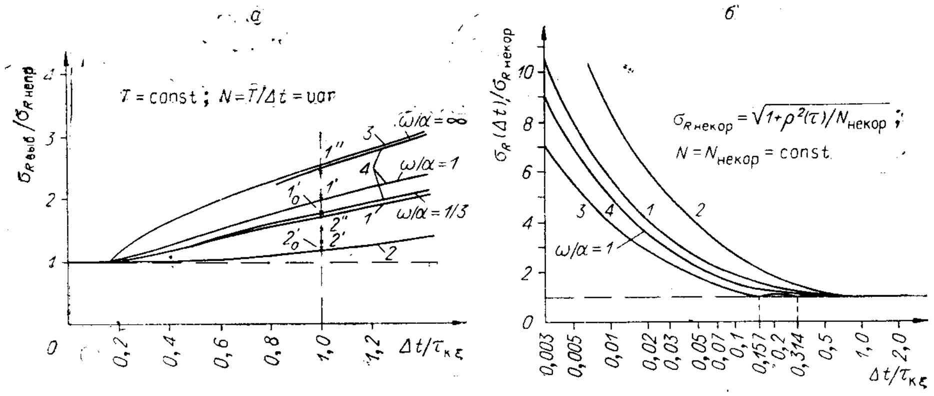

Рис. 4. Зависимость среднеквадратических отклонений оценок непосредственных корреляционных функций от отношения интервала выборки ко времени корреляции процесса:

а — при постоянном времени осреднения; *б* — при постоянном объеме выборки для $\rho_1(\tau)=\exp\{-\alpha|\tau|\}$; $\rho_2(\tau)=\exp\{-\alpha^2\tau^2\}$; $\rho_3(\tau)=\sin\alpha\tau/\alpha\tau$; $\rho_4(\tau)=\exp\{-\alpha|\tau|\}\cos\omega\tau$.

некоторым приближением они отражают также соответствующие зависимости и при других τ, если учесть соотношение между $[\sigma_R^2(\tau)/\sigma_R^2(\infty)]_{\text{непр}}$ и $[1+\rho^2(\tau)]$. Как следует из рис. 4, *а*, для всех $\Delta t\leqslant 0{,}15\,\tau_{\text{к}\xi}$ выборочный алгоритм практически не отличается от непрерывного. При этом предполагается, что используются все $N=\dfrac{T}{\Delta t}$ пар отсчетов.

Очень часто берут $\Delta t=\Delta\tau$, где $\Delta\tau$ — шаг квантования оценки корреляционной функции по аргументу. Так как $\Delta\tau$ выбирается из условия обеспечения заданной погрешности интерполяции оценки по точкам и имеет порядок $\Delta t=(0{,}01\div 0{,}005)\,\tau_{\text{к}\xi}$, то в этом случае для получения достаточной для практики точности в несколько процентов необходимо брать N порядка 10^4—10^5 и более. Однако число пар отсчетов, используемых для вычисления определенной точки оценки корреляционной функции с той же средней точностью, можно существенно уменьшить, если использовать не все $\dfrac{T}{\Delta\tau}$ отсчеты, а лишь отстоящие на $\Delta t\approx(0{,}1\div 0{,}15)\,\tau_{\text{к}\xi}$, или использовать слабо коррелированные отсчеты. При этом дисперсия останется практически равной дисперсии непрерывного алгоритма, но получится выигрыш в объеме вычислительных работ, причем тем больший, чем больше точек оценки при данном T и Δt вычисляется.

Увеличение дисперсии при несоблюдении условия некоррелированности выборки наглядно иллюстрирует рис. 4, *б*. Как видим, наиболее резкое увеличение характерно для дисперсии оценки корреляционной функции $R(\tau) = R(0)\exp\{-(\alpha\tau)^2\}$. Объясняется это тем, что при том же значении $\frac{\Delta t}{\tau_{\kappa\,\xi}}$ осредняемые отсчеты при данной функции более коррелированы по сравнению с отсчетами при других функциях. Так, при $\Delta t = 0{,}1\,\tau_{\kappa\,\xi}$ имеем: $\rho_{1\kappa}(\Delta t;\ \tau = 0) = 0{,}55$; $\rho_{2\kappa} = 0{,}94$; $\rho_{3\kappa} = 0{,}206$. При других алгоритмах вид кривых (см. рис. 4) останется примерно таким же, а при $\Delta t \geqslant (0{,}5 \div 0{,}7)\,\tau_{\kappa\,\xi}$ совпадение будет точным. Отличие будет только в масштабе по оси ординат, который можно определить для данного вида функции $\rho(\tau)$ из сравнения соотношений (8) — (11) и (17) — (23). Для сравнения на рис. 4, *а* представлены значения $\frac{\sigma_{R\ \text{выб}}(\tau)}{\sigma_{R\ \text{непр}}(\tau)}$ при $\Delta t = \tau_{\kappa\,\xi}$ для релейного (*1′*, *2′*) и полярного (*1″*, *2″*) алгоритмов при $\tau = \infty$ и релейного при $\tau = 0$ ($1_0'$, $2_0'$) для двух функций $\rho_1(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ и $\rho_2(\tau) = e^{-(\alpha\tau)^2}$ (см. также рис. 2, *б*, точки *1*, *2*). Как видим, при знаковых алгоритмах увеличение интервала выборки Δt при $T = \text{const}$ приводит к более резкому увеличению дисперсии по сравнению с непосредственным.

ДИСПЕРСИЯ ОЦЕНОК НОРМИРОВАННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

1. *Математическое ожидание оценки.* Следуя [6], будем под нормированной автокорреляционной функцией понимать

$$\rho_{\xi\xi}(\tau) = \frac{R_{\xi\xi}(\tau)}{R_{\xi\xi}(0)}, \tag{24а}$$

а под нормированной взаимной корреляционной функцией

$$\rho_{\xi\eta}(\tau) = \frac{R_{\xi\xi}(\tau)}{\sqrt{R_{\xi\xi}(0)\,R_{\eta\eta}(0)}}. \tag{24б}$$

В дальнейшем будем всюду рассматривать функцию $\rho_{\xi\xi}(\tau)$, опуская слово «авто». Отличие в вычислении $\rho_{\xi\eta}(\tau)$ будет оговорено отдельно.

В общем виде оценка нормированных автокорреляционных функций может быть представлена как

$$\overset{*}{\rho}_{\xi\xi}(\tau) = F\left\{\overset{*}{\rho}_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)\right\}, \tag{25}$$

где F — некоторая функция, определяемая видом связи $\rho_{\xi\xi}(\tau)$ с $\rho_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)$, а

$$\overset{*}{\rho}_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau) = \frac{R^*_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)}{R^*_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(0)}. \tag{26}$$

Так как при определении корреляции всегда стремятся к тому, чтобы выполнялось условие $\delta^2_R(\tau) \ll 1$, с большой вероятностью можно утверждать, что отклонение оценок $R^*(\tau)$ и $R^*(0)$ относительно математического ожидания будет находиться в достаточно узкой полосе. Поэтому функцию (26) можно разложить в ряд Тейлора в точке ($M\{R^*(\tau)\}$, $M\{R^*(0)\}$). С учетом (3) это разложение с точностью до первых членов имеет вид

$$\overset{*}{\rho}_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau) \approx \rho_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)\left[1 - \frac{R^*_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(0) - R_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(0)}{R_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(0)} + \right.$$
$$\left. + \frac{R^*_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau) - R_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)}{R_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)}\right]. \tag{27}$$

Из (27) имеем

$$M\{\overset{*}{\rho}_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)\} \approx \rho_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau). \tag{28}$$

Аналогично можно показать, что соотношение, подобное (28), выполняется и для оценки нормированной взаимной корреляционной функции.

Рассматривая совместно (28), (4) и (5), видим, что для непосредственного и релейного алгоритмов в качестве оценки $\overset{*}{\rho}_{\xi\xi}(\tau)$ можно использовать (26). Для полярного алгоритма в силу того, что $\overset{*}{R}_{\operatorname{sign}\xi\operatorname{sign}\xi}(0) \equiv 1$, $\overset{*}{\rho}_{\operatorname{sign}\xi\operatorname{sign}\xi}(\tau) = \overset{*}{R}_{\operatorname{sign}\xi\operatorname{sign}\xi}(\tau)$. Поэтому в качестве оценки $\overset{*}{\rho}_{\xi\xi}(\tau)$ при полярном алгоритме можно взять функцию

$$\overset{*}{\rho}_{\text{п}}(\tau) = \sin\left[\frac{\pi}{2}\,\overset{*}{\rho}_{\operatorname{sign}\xi\operatorname{sign}\xi}(\tau)\right]. \tag{29}$$

В некоторых задачах преобразования (29) можно не производить. В этом случае погрешность полярного алгоритма необходимо оценивать по формулам предыдущего раздела.

Можно показать [7, 9], что при большом объеме исходных данных

$$M\{\overset{*}{\rho}_{\text{п}}(\tau)\} \approx \rho_{\xi\xi}(\tau).$$

Сложная зависимость (4) не позволяет указать в общем виде функцию F для цифро-полярного алгоритма. Здесь в качестве оценки можно использовать $\overset{*}{\rho}_{\xi_{\text{кв}}\operatorname{sign}\xi}(\tau)$, а в полученном результате учитывать систематическую абсолютную ошибку $\rho_{\xi\xi}(\tau) - \rho_{\xi_{\text{кв}}\operatorname{sign}\xi}(\tau)$ при данном числе уровней квантования [12]. Если же цифро-полярный алгоритм используется при относительном интервале квантования по уровню $\beta \leqslant 1$ (шесть и более уровней квантования на вероятностном диапазоне), то в качестве оценки $\rho_{\xi\xi}(\tau) \leqslant 0{,}9$ можно использовать [12] функцию

$$\overset{*}{\rho}_{\text{ц}-\text{п}\,I}(\tau) = \left[1 - \frac{\beta^2}{24}(1 + 0{,}047\beta^2)\right]\overset{*}{\rho}_{\xi_{\text{кв}}\operatorname{sign}\xi}(\tau) \tag{30}$$

или

$$\overset{*}{\rho}_{\text{ц}-\text{п}\,II}(\tau) = \left[1 + \frac{\beta^2}{12}(1 + 0{,}027\beta^2)\right]\overset{*}{\rho}_{\xi_{\text{кв}}\operatorname{sign}\xi}(\tau), \tag{31}$$

а при $0{,}9 \leqslant \rho_{\xi\xi}(\tau) \leqslant 1$ — функцию $\overset{*}{\rho}_{\xi_{\text{кв}}\operatorname{sign}\xi}(\tau)$ с учетом соответствующих систематических поправок (рис. 5, *а*). Здесь символы *I* или *II* указывают на тип применяемого квантователя. При $\beta \leqslant 0{,}4$ (15 и более уровней) можно непосредственно использовать оценку $\overset{*}{\rho}_{\xi_{\text{кв}}\operatorname{sign}\xi}(\tau)$. Во всех случаях оценка так же, как и для других алгоритмов, будет асимптотически несмещенной.

2. *Дисперсия оценки при некоррелированной выборке.* Для всех алгоритмов дисперсия оценки нормированной корреляционной функции связана с дисперсией оценки $\overset{*}{\rho}_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)$.

Используя разложение (27) и учитывая (12), имеем

$$\sigma^2 [\rho^*_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)] = M\{[\rho^*_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau) - \rho_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)]^2\} = \delta^2 [R^*_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)] -$$

$$- 2\rho_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)\,\lambda(\tau) + \rho^2_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)\,\delta^2 [R^*_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(0)], \qquad (32)$$

где

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{R^2_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(0)} [M\{R^*_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\xi)\, R^*_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(0)\} -$$

$$- R_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)\, R_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(0)]. \qquad (33)$$

Подставляя в (32) значения $\delta^2_R(\tau)$ и $\lambda(\tau)$ (см. приложение 2) для некоррелированной выборки, получаем:
для непосредственного алгоритма

$$\sigma^2 [\rho^*_{\xi\xi}(\tau)] = \frac{1}{N} [1 - \rho^2_{\xi\xi}(\tau)]; \qquad (34)$$

для релейного алгоритма

$$\sigma^2 [\rho^*_{\xi\,\mathrm{sign}\,\xi}(\tau)] = \frac{1}{N}\left\{\frac{\pi}{2}[1 + \rho^2_{\xi\xi}(\tau)] - 2\rho_{\xi\xi}(\tau)\,[\rho_{\xi\xi}(\tau)\sqrt{1 - \rho^2_{\xi\xi}(\tau)} +\right.$$

$$\left. + \arcsin \rho_{\xi\xi}(\tau)]\right\} \leqslant \frac{\pi}{2N}[1 - \rho^2_{\xi\xi}(\tau)]; \qquad (35)$$

для полярного алгоритма $\sigma^2 [\rho^*_{\mathrm{sign}\,\xi\,\mathrm{sign}\,\xi}(\tau)] = \sigma^2 [R^*_{\mathrm{sign}\,\xi\,\mathrm{sign}\,\xi}(\tau)]$.
Следовательно, используя первые два члена разложения функции (29) в ряд, находим

$$\sigma^2 [\rho^*_{\text{п}}(\tau)] \approx \left[\frac{d\rho_{\text{п}}}{d\rho_{\mathrm{sign}\,\xi\,\mathrm{sign}\,\xi}}\right]^2 \sigma^2 [\rho_{\mathrm{sign}\,\xi\,\mathrm{sign}\,\xi}(\tau)] =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}[1 - \rho^2_{\xi\xi}(\tau)]\,\sigma^2 [R^*_{\mathrm{sign}\,\xi\,\mathrm{sign}\,\xi}(\tau)]. \qquad (36)$$

Соотношение (36) пригодно как для выборочного, так и для непрерывного алгоритма. В частности, при некоррелированной парной выборке подстановкой в (36) значения $\sigma^2[R^*_{\mathrm{sign}\,\xi\,\mathrm{sign}\,\xi}(\tau)]$ получим известный [7, 9] результат:

$$\sigma^2 [\rho^*_{\text{п}}(\tau)] \approx \frac{\pi^2}{4N}[1 - \rho^2_{\xi\xi}(\tau)]\left\{1 - \left[\frac{2}{\pi}\arcsin \rho_{\xi\xi}(\tau)^2\right]\right\}. \qquad (37)$$

Из (37) следует

$$\frac{\pi^2}{4N}[1 - \rho^2_{\xi\xi}(\tau)]^2 \leqslant \sigma^2 [\rho^*_{\text{п}}(\tau)] \leqslant \frac{\pi^2}{4N}[1 - \rho^2_{\xi\xi}(\tau)]\left[1 - \frac{4}{\pi^2}\rho^2_{\xi\xi}(\tau)\right]. \qquad (38)$$

Для цифро-полярного алгоритма в общем виде найти $\sigma^2[\rho^*_{\xi_{\text{кв}}\,\mathrm{sign}\,\xi}(\tau)]$, а тем более $\sigma^2[\rho^*_{\text{ц}-\text{п}}(\tau)]$ затруднительно. Для него укажем лишь оценку сверху, которая с учетом (35) и (38) имеет вид

$$\sigma^2 [\rho^*_{\text{ц}-\text{п}}(\tau)] \leqslant [1 - \rho^2_{\xi\xi}(\tau)]\,\sigma^2 [\rho^*_{\text{ц}-\text{п}}(\infty)].$$

Как следует из (32), независимо от алгоритма

$$\lim_{\tau\to\infty} \sigma^2 [\rho^*_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)] = \delta^2 [R^*_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)]. \qquad (39)$$

Данное равенство очевидно из (27), так как при $\tau \to \infty$ наибольшее влияние на значение $\rho^*(\tau)$ оказывает последний член разложения.

Из (4) можно показать, что при $\rho(\tau) \to 0$ справедливо соотношение

$$\rho_{\xi_{кв}\,\mathrm{sign}\,\xi}(\tau) \to \gamma \rho_{\xi\xi}(\tau), \qquad (40)$$

где γ определяется выражением (20). Поэтому из (39) и (40) с учетом (8) и предельных соотношений (35), (38) получаем

$$\sigma^2 [\rho^*_{ц-п}(\tau)] \leqslant \frac{1-\rho^2_{\xi\xi}(\tau)}{N} \frac{\sigma^2_{\xi_{кв}}}{\gamma^2 R^2_{\xi_{кв}\,\mathrm{sign}\,\xi}(0)}. \qquad (41)$$

Для рассматриваемых алгоритмов зависимость $\sigma_\rho(\tau) = \delta_\rho(\tau)$ от значений $|\rho_{\xi\xi}(\tau)|$ представлена на рис. 5, *б*. Как видим, в среднем по кривой наибольшие погрешности имеет полярный алгоритм, наименьшие — непосредственный и релейный.

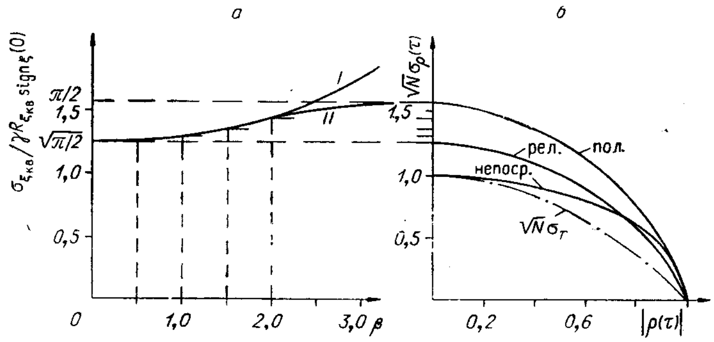

Рис. 5. Соотношение между среднеквадратическими отклонениями оценок нормированных автокорреляционных функций, получаемых осреднением некоррелированных парных выборок.

Используя показанный выше метод разложения оценки в ряд Тейлора, нетрудно убедиться, что для непосредственной оценки (24б) нормированной взаимной корреляционной функции справедливо соотношение

$$\sigma^2[\rho^*_{\xi\eta}(\tau)] = \frac{1}{N}\left[1 - 2\rho_{\eta\eta}(\tau)\rho_{\xi\eta}(0)\rho_{\xi\eta}(\tau) + \rho^2_{\xi\eta}(0)\rho^2_{\xi\eta}(\tau)\right]. \qquad (42)$$

Из (42) при $\xi(t) = \eta(t)$ получаем (34), а при $\tau = 0$ следует, что дисперсия нормированной взаимной корреляционной функции совпадает с дисперсией $\sigma^2[r^*_{\xi\eta}]$ оценки коэффициента корреляции $r_{\xi\eta}$ случайных величин ξ и η [6] (см. рис. 5, *б*, кривая σ_r). Как следует из (42), $\sigma^2[\rho^*_{\xi\eta}(\tau)]$ зависит от вида $\rho_{\eta\eta}(\tau)$ и $\rho_{\xi\eta}(\tau)$ и необязательно при $\rho_{\xi\eta}(\tau) = 1$ будет равна нулю, если только при этом $\tau \neq 0$. Однако независимо от $\rho_{\eta\eta}(\tau)$ и $\rho_{\xi\eta}(\tau)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{N}\left[1 - |\rho_{\xi\eta}(0)\rho_{\xi\eta}(\tau)|\right]^2 \leqslant \sigma^2[\rho^*_{\xi\eta}(\tau)] \leqslant \frac{1}{N}\left[1 + |\rho_{\xi\eta}(0)\rho_{\xi\eta}(\tau)|\right]^2. \qquad (43)$$

При других алгоритмах в качестве оценки нормированной взаимной корреляционной функции можно взять $\rho^*_{\xi\eta}(\tau) = F\{\rho^*_{f_1(\xi)f_2(\eta)}(\tau)\}$, где $\rho^*_{f_1(\xi)f_2(\eta)}(\tau) = \dfrac{R_{f_1(\xi)f_2(\eta)}(\tau)}{R_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(0)}$.

Для полярного алгоритма эта оценка полностью совпадает с оценкой нормированной автокорреляционной функции и, следовательно, дисперсии оценок также совпадают. Для релейного и цифро-полярного алгоритмов в общем случае такого совпадения дисперсий оценок нет (в отличие от дисперсий оценок ненормированных корреляционных функций). Отличие дисперсий может быть приближенно оценено на основе сравнения дисперсий непосредственных оценок нормированных авто- и взаимных корреляционных функций.

Сравнение рис. 2, 3 и 5 показывает, что при той же выборке дисперсия оценок нормированных корреляционных функций меньше нормированных дисперсий оценок авто- и взаимных корреляционных функций. Особенно большой выигрыш получается при близких к единице значениях $\rho(\tau)$. Поэтому в тех задачах, где важна только форма корреляционных функций, целесообразнее вычислять нормированные корреляционные функции, особенно при больших значениях $\rho(\tau)$. Или вычислять отдельно $\rho(\tau)$ и более точно σ_ξ и σ_η при вычислении авто- и взаимных корреляционных функций.

3. *Дисперсия при коррелированной выборке и непрерывном алгоритме.* Общее соотношение для дисперсии оценок нормированных автокорреляционных функций, полученных непрерывным осреднением, выражается сравнительно просто лишь для непосредственного алгоритма, для которого [5]

$$\lambda(\tau) = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1-\frac{\theta}{T}\right)\rho_{\xi\xi}(\theta)\,[\rho_{\xi\xi}(\theta+\tau)+\rho_{\xi\xi}(\theta-\tau)]\,d\theta; \tag{44}$$

$$\sigma^2[\overset{*}{\rho}_{\xi\xi}(\tau)] \approx \frac{2}{T}\int_0^\infty \{\rho^2_{\xi\xi}(\theta)\,[1+2\rho^2_{\xi\xi}(\tau)] + \rho_{\xi\xi}(\theta+\tau)\,\rho_{\xi\xi}(\theta-\tau) - 2\rho_{\xi\xi}(\tau)\,\rho_{\xi\xi}(\theta)\,[\rho_{\xi\xi}(\theta+\tau)+\rho_{\xi\xi}(\theta-\tau)]\}\,d\theta. \tag{45}$$

Из (45) следует, что при непрерывном осреднении вид $\sigma^2_\rho(\rho)$ зависит от вида функции $\rho(\tau)$. Для рассмотренных ранее функций $\rho(\tau)$ эта зависимость иллюстрируется рис. 6. На рис. 6 не отражены дисперсии оценок функций $\rho_4(\tau) = \exp\{-\alpha|\tau|\}\cos\omega\tau$ и $\rho_5(\tau) = \exp\{-(\alpha\tau)^2\}\cos\omega\tau$. Однако нетрудно показать, что при одинаковых значениях $|\rho(\tau)|$ кривые, соответствующие $\rho_4(\tau)$ и $\rho_5(\tau)$, располагаются ниже кривых для $\rho_1(\tau) = \exp\{-\alpha|\tau|\}$ и $\rho_2(\tau) = \exp\{-(\alpha\tau)^2\}$. Учитывая сказанное, из рис. 6 видим, что, за исключением $\rho_3(\tau) = \frac{\sin\alpha\tau}{\alpha\tau}$, кривые отношения дисперсий $\frac{\sigma^2_\rho(\tau)}{\sigma^2_\rho(\infty)}$ при непрерывном способе осреднения располагаются ниже кривой, отражающей зависимость дисперсии при осреднении по некоррелированной выборке. Но хотя значения отношения для $\rho_3(\tau)$ при $|\rho(\tau)| < 0{,}22$ больше $[1-\rho^2(\tau)]$, это превышение составляет менее 10% от $[1-\rho^2(\tau)]$. Поэтому практически вместо (45) можно пользоваться соотношением*

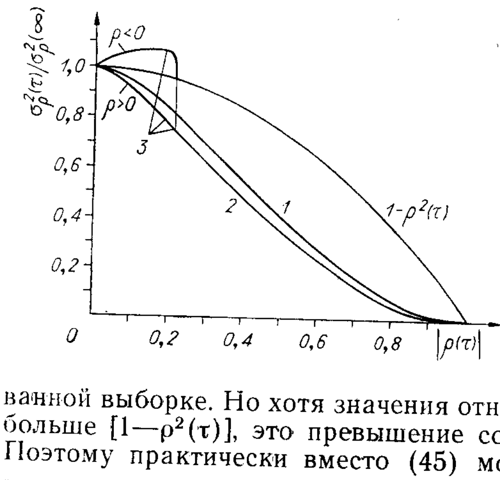

Рис. 6. Соотношение между $\sigma^2_\rho(\tau)/\sigma^2_\rho(\infty)$ для непосредственного алгоритма при осреднении некоррелированных парных выборок и при непрерывном осреднении, когда $\rho_1(\tau) = \exp\{-\alpha|\tau|\}$; $\rho_2(\tau) = \exp\{-\alpha^2\tau^2\}$; $\rho_3(\tau) = \sin\alpha\tau/\alpha\tau$.

* Это справедливо по крайней мере для $\rho(\tau)$, подобных рассмотренным.

$$\sigma^2 \left[\rho^*_{\xi\xi}(\tau)\right] \leqslant \left[1 - \rho^2_{\xi\xi}[\tau]\right] \frac{2}{T} \int\limits_0^\infty \rho^2_{\xi\xi}(\theta)\, d\theta. \tag{45a}$$

Также, учитывая (35), (39) и (42), имеем для других алгоритмов:

$$\sigma^2 \left[\rho^*_{\xi\,\mathrm{sign}\,\xi}(\tau)\right] \leqslant \left[1 - \rho^2_{\xi\xi}(\tau)\right] \frac{\pi}{T} \int\limits_0^\infty \rho^2_{\xi\xi}(\theta)\, d\theta; \tag{46}$$

$$\sigma^2 \left[\rho^*_{\text{п}}(\tau)\right] \leqslant \left[1 - \rho^2_{\xi\xi}(\tau)\right] \frac{\pi^2}{2T} \int\limits_0^\infty \rho^2_{\xi\xi}(\theta)\, d\theta; \tag{47}$$

$$\sigma^2 \left[\rho^*_{\text{ц}-\text{п}}(\tau)\right] \leqslant \left[1 - \rho^2_{\xi\xi}(\tau)\right] \frac{2\sigma^2_{\xi_{\text{кв}}}}{T\gamma^2 R^2_{\xi_{\text{кв}}\,\mathrm{sign}\,\xi}(0)} \int\limits_0^\infty \rho^2_{\xi\xi}(\theta)\, d\theta. \tag{48}$$

Правые сомножители соотношений (45а) — (48) являются значениями дисперсии оценок нормированной корреляционной функции при $\tau \to \infty$. Поэтому, считая, что для всех алгоритмов и способов осреднения справедливо равенство $\sigma^2[\rho(\infty)] = \delta^2[R(\infty)]$, можно к дисперсии оценок нормированных корреляционных функций полностью применить проведенный ранее анализ сходимости выборочного алгоритма к непрерывному и влияния коррелированности выборки на дисперсию оценки, учитывая при этом соотношение между кривыми *1*—*3* и $[1-\rho^2(\tau)]$ рис. 6.

Соотношения для дисперсий оценок нормированных взаимных корреляционных функций могут быть найдены аналогично. Для непосредственного алгоритма значения дисперсий определяются формулой:

$$\begin{aligned}\sigma^2 \left[\rho^*_{\xi\eta}(\tau)\right] = \frac{1}{T} \int\limits_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\theta|}{T}\right) \{\rho_{\xi\xi}(\theta)\, \rho_{\eta\eta}(\theta) + \rho_{\xi\eta}(\theta + \tau)\, \rho_{\xi\eta}(\tau - \theta) + \\ + \frac{1}{2} \rho^2_{\xi\eta}(\tau) \left[\rho^2_{\xi\xi}(\theta) + \rho^2_{\eta\eta}(\theta) + 2\rho^2_{\xi\eta}(\theta)\right] - \\ - 2\rho_{\xi\eta}(\tau) \left[\rho_{\xi\xi}(\theta)\, \rho_{\xi\eta}(\theta + \tau) + \rho_{\xi\eta}(\theta)\, \rho_{\eta\eta}(\theta + \tau)\right]\}\, d\theta.\end{aligned} \tag{49}$$

При $\xi(t) = \eta(t)$ из (49) получаем частный случай (45).

ВЫВОДЫ

При равных условиях (нахождение оценок нормированных корреляционных функций по тем же данным) знаковые алгоритмы по сравнению с непосредственным дают в среднем по кривой большие значения дисперсий оценок при выборочном осреднении и могут дать примерно одинаковые дисперсии при непрерывном осреднении.

Для всех алгоритмов и способов осреднения относительные дисперсии оценок нормированных корреляционных функций при значительной корреляции во много раз меньше относительных дисперсий оценок ненормированных корреляционных функций и не превышают последние при любых значениях $\rho(\tau)$.

При всех алгоритмах с выборочным осреднением целесообразно брать интервал выборки из условия $\Delta\tau \ll \Delta t \leqslant (0{,}1 \div 0{,}2)\, \tau_{\text{к}\,\xi}$. При этом, практически не увеличивая погрешности измерения по тем же экспериментальным данным, можно существенно уменьшить объем вычислений по сравнению с осреднением, когда $\Delta t = \Delta\tau$. Увеличение интервала выборки приводит к более резкому увеличению дисперсий выборочных оценок нормированных корреляционных функций по сравнению с дисперсиями выборочных оценок ненормированных корреляционных функций, особенно при значительной корреляции.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить канд. техн. наук В. И. Юшина, замечания которого способствовали улучшению работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Так как

$$\sigma^2[R^*(\tau)] = M\{R^{*2}(\tau) - R^2(\tau)\}, \text{ а } R^*(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \varkappa(n\,\Delta t;\ \tau), \tag{П1.1}$$

имеем

$$\sigma^2[R^*_{f_1(\xi) f_2(\eta)}(\tau)] = M\left\{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \varkappa(i\,\Delta t;\ \tau)\,\varkappa(j\,\Delta t;\ \tau)\right\} - R^2_{f_1(\xi) f_2(\eta)}(\tau). \tag{П1.2}$$

Меняя местами операции суммирования и осреднения и учитывая, что для стационарных процессов

$$M\{\varkappa(t;\ \tau)\,\varkappa(t+\theta;\ \tau)\} = R_\varkappa(\theta;\ \tau) + M\{\varkappa(t;\ \tau)\} \times$$
$$\times M\{\varkappa(t+\theta;\ \tau)\} = R_\varkappa(\theta;\ \tau) + R^2_{f_1(\xi) f_2(\eta)}(\tau), \tag{П1.3}$$

из (П1.2) получаем

$$\sigma^2[R^*_{f_1(\xi) f_2(\eta)}(\tau)] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} R_\varkappa((j-i)\,\Delta t;\ \tau). \tag{П1.4}$$

При $j-i=k$ $N-|k|$ слагаемые двойной суммы из (П1.4) имеют одинаковые значения. Поэтому, учитывая четность $R_\varkappa(\theta;\ \tau)$ по отношению к θ, имеем

$$\sigma^2[R^*_{f_1(\xi) f_2(\eta)}(\tau)] = \frac{1}{N^2}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} (N-|k|)\,R_\varkappa(k\,\Delta t;\ \tau) =$$
$$= \frac{1}{N}\left[R_\varkappa(0;\ \tau) + 2\sum_{k=1}^{N-1}\left(1-\frac{k}{N}\right)R_\varkappa(k\,\Delta t;\ \tau)\right]. \tag{П1.5}$$

Из (П1.5) следует, что для некоррелированной выборки, т. е. при $\Delta t > \tau_{\text{к}\,\varkappa}$,

$$\sigma^2[R^*_{f_1(\xi) f_2(\eta)}(\tau)] = \frac{1}{N} R_\varkappa(0;\ \tau). \tag{П1.6}$$

Для нормальных стационарных процессов имеем:
для алгоритма непосредственных вычислений [6]

$$R_\varkappa(0;\ \tau) = R_{\xi\xi}(\theta)\,R_{\eta\eta}(\theta) + R_{\xi\eta}(\theta+\tau)\,R_{\xi\eta}(\tau-\theta); \tag{П1.7}$$

для релейного алгоритма [8]

$$R_\varkappa(0;\ \tau) = \sigma_\xi^2\left[1 - \frac{2}{\pi}\rho^2_{\xi\eta}(\tau)\right]; \tag{П1.8а}$$

$$R_\varkappa(\theta;\ \infty) = \frac{2}{\pi}\sigma_\xi^2\,\rho_{\xi\xi}(\theta)\arcsin\rho_{\eta\eta}(\theta); \tag{П1.8б}$$

для $\xi(t)=\eta(t)$

$$R_{\varkappa}(\theta;\ 0)=\frac{2}{\pi}\ \sigma_{\xi}^{2}\left[\rho_{\xi\xi}(\theta)\arcsin\rho_{\xi\xi}(\theta)+\sqrt{1-\rho_{\xi\xi}^{2}(\theta)}-1\right]; \qquad (\text{П}1.8\text{в})$$

для полярного алгоритма

$$R_{\varkappa}(0;\ \tau)=1-\left[\frac{2}{\pi}\arcsin\rho_{\xi\eta}(\tau)\right]^{2}; \qquad (\text{П}1.9\text{а})$$

$$R_{\varkappa}(\theta;\ \infty)=\frac{4}{\pi^{2}}\arcsin\rho_{\xi\xi}(\theta)\arcsin\rho_{\eta\eta}(\theta); \qquad (\text{П}1.9\text{б})$$

для $\xi(t)=\eta(t)$

$$R_{\varkappa}(\theta;\ 0)=0; \qquad (\text{П}1.9\text{в})$$

для цифро-полярного алгоритма

$$R_{\varkappa}(0;\ \tau)=\sigma_{\xi_{\text{кв}}}^{2}-R_{\xi_{\text{кв}}\operatorname{sign}\eta}^{2}(\tau); \qquad (\text{П}1.10\text{а})$$

$$R_{\varkappa}(\theta;\ \infty)=\frac{2}{\pi}\ R_{\xi_{\text{кв}}\ \xi_{\text{кв}}}(\theta)\arcsin\rho_{\eta\eta}(\theta). \qquad (\text{П}1.10\text{б})$$

Подставляя (П1.7) — (П1.10) в (П1.5) и (15), получаем (7) — (11) и (17) — (19).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Функцию $\lambda(\tau)$ можно найти, проделав операции, аналогичные операциям при доказательстве $\sigma_{R}^{2}(\tau)$. Действительно, так как

$$\lambda(\tau)=\frac{1}{R^{2}(0)}\left[M\{R^{*}(\tau)\,R^{*}(0)\}-R(\tau)\,R(0)\right], \qquad (\text{П}2.1)$$

то, подставляя в (П2.1) значения $R^{*}(\tau)$ и $R^{*}(0)$ из (1), получаем

$$\lambda(\tau)=\frac{1}{N^{2}R_{f_1(\xi)f_2(\xi)}^{2}(0)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}M\{\varkappa(i\Delta t;\ \tau)\,\varkappa(j\Delta t;\ 0)\}-\rho_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau). \qquad (\text{П}2.2)$$

Из (П2.2) нетрудно получить значение $\lambda(\tau)$ для выборочного осреднения некоррелированных отсчетов:

$$\lambda(\tau)=\frac{1}{N^{2}R_{f_1(\xi)f_2(\xi)}^{2}(0)}\left[N(N-1)\,M\{\varkappa(i\Delta t;\ \tau)\}\ M\{\varkappa(j\Delta t;\ 0)\}+\right.$$
$$\left.+\ NM\{\varkappa(i\Delta t;\ \tau)\,\varkappa(i\Delta t;\ 0)\}\right]-\rho_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)=$$
$$=\frac{1}{N}\left[\frac{1}{R_{f_1(\xi)f_2(\xi)}^{2}(0)}\ M\{f_1^{2}[\xi(t)]\,f_2[\xi(t)]\,f_2[\xi(t+\tau)]\}-\rho_{f_1(\xi)f_2(\xi)}(\tau)\right]. \qquad (\text{П}2.3)$$

Для алгоритма непосредственных вычислений имеем [6]

$$M\{f_1^{2}[\xi(t)]\,f_2[\xi(t)]\,f_2[\xi(t+\tau)]\}=M\{\xi^{3}(t)\,\xi(t+\tau)\}=3R_{\xi\xi}(0)\,R_{\xi\xi}(\tau).$$

Следовательно,

$$\lambda(\tau)=\frac{2}{N}\,\rho_{\xi\xi}(\tau). \qquad (\text{П}2.4)$$

Для релейного алгоритма

$$M\{f_1^{2}[\xi(t)]\,f_2[\xi(t)]\,f_2[\xi(t+\tau)]\}=M\{\xi^{2}(t)\operatorname{sign}\xi(t)\operatorname{sign}\xi(t+\tau)\}=$$
$$=\frac{2}{\pi}\,\sigma_{\xi}^{2}\left[\rho_{\xi\xi}(\tau)\sqrt{1-\rho_{\xi\xi}^{2}(\tau)}+\arcsin\rho_{\xi\xi}(\tau)\right]$$

и

$$\lambda(\tau)=\frac{1}{N}\left[\rho_{\xi\xi}(\tau)\sqrt{1-\rho_{\xi\xi}^{2}(\tau)}+\arcsin\rho_{\xi\xi}(\tau)-\rho_{\xi\xi}(\tau)\right]. \qquad (\text{П}2.5)$$

Наконец, для полярного алгоритма

$$M\{[\operatorname{sign}\xi(t)]^3\operatorname{sign}\xi(t+\tau)\}=\frac{2}{\pi}\arcsin\rho_{\xi\xi}(\tau)$$

и

$$\lambda(\tau)=0. \qquad (П2.6)$$

Подставляя (П2.4) — (П2.6) в (32), получаем (34), (35) и подтверждение равенства $\sigma^2[\rho_{\operatorname{sign}\xi\operatorname{sign}\xi}(\tau)]=\sigma^2[R^*_{\operatorname{sign}\xi\operatorname{sign}\xi}(\tau)]$.

В заключение получим значение $\lambda(\tau)$ для алгоритма непосредственного осреднения коррелированных отсчетов. Для непосредственного алгоритма справедливо равенство [6]

$$M\{\varkappa(t;\tau)\varkappa(t+\theta;0)\}=M\{\xi(t)\xi(t+\tau)\xi^2(t+\theta)\}=$$
$$=R_{\xi\xi}(\theta)[R_{\xi\xi}(\theta+\tau)+R_{\xi\xi}(\theta-\tau)]. \qquad (П2.7)$$

Подставляя (П2.7) в (П2.2), после подсчета числа одинаковых слагаемых получаем

$$\lambda(\tau)=\frac{2}{N}\left\{\rho_{\xi\xi}(\tau)+\sum_{k=1}^{N-1}\left(1-\frac{k}{N}\right)\rho_{\xi\xi}(k\,\Delta t)\,[\rho_{\xi\xi}(k\,\Delta t+\tau)+\rho_{\xi\xi}(k\,\Delta t-\tau)]\right\}. \qquad (П2.8)$$

Отсюда, полагая $\Delta t\to 0$ при $N\Delta t=T=\text{const}$, получаем (44) — значение $\lambda(\tau)$ для непрерывного способа осреднений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Н. Ланге. Корреляционная электроника. Л., Судпромгиз, 1963.
2. Б. С. Синицын. Автоматические корреляторы и их применение. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1964.
3. Г. Я. Мирский. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М.—Л., «Энергия», 1967.
4. K. Krepler, G. W. Werner. Korrelatoren mit Amplitudenquantisierung.— Messen—Steuern—Regeln, 1964, J. 7, H. 4.
5. Б. Н. Кутин. О вычислении корреляционной функции стационарного случайного процесса по экспериментальным данным.— Автоматика и телемеханика, 1957, № 3.
6. Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления. М., «Советское радио», 1963.
7. Ю. К. Постоенко. Некоторые вопросы исследования статистических погрешностей электронных корреляторов.— Научные труды СибВИМ, вып. 2. Новосибирск, 1964.
8. В. В. Губарев, Ю. К. Постоенко. Вопросы построения структур и исследование методических погрешностей СВУ для обработки случайных процессов.— Автоматическое управление, вычислительная техника. Материалы симпозиума молодых ученых и специалистов, вып. 1. Новосибирск, Зап.-Сиб. кн. изд-во, 1968.
9. D. S. Ruchkin. Error of Correlation Coefficient Estimates from Polarity Coincidences.— Trans. IEEE, Inform. Theory, 1965, v. 11, № 2.
10. A. T. Fullar. Sampling Errors in the Measurement of Autocorrelation.— Journal of Electronics and Control, 1958, v. IV, № 6.
11. K. März. Der mittlere Fehler von Kurzzeit—Korrelationsfunktionen.— NTZ, 1965, J. 18, H. 18.
12. В. В. Губарев. О цифровом варианте релейных корреляционных измерений.— Автоматическое управление, вычислительная техника. Материалы симпозиума молодых ученых и специалистов, вып. 1. Новосибирск, Зап.-Сиб. кн. изд-во, 1968.

Поступила в редакцию
5 мая 1967 г.,
окончательный вариант —
17 октября 1967 г.