А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1968

УДК 681—2.08

Ю. Л. ХАИТ, Б. М. ЯКОБСОН

(Москва)

К ВОПРОСУ ОБ ИНФОРМАЦИОННЫХ МЕРАХ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ В СИСТЕМАХ КОНТРОЛЯ И УПРАВЛЕНИЯ

В основе процессов контроля и управления лежит изменение статистических связей между стохастическими системами, например между управляемой и управляющей.

Для оценки эффективности контроля и управления целесообразно использовать информационные меры, определяющие изменения степени статистической связи между параметрами этих систем*. При изменении статистических связей между рядом систем многомерный случайный процесс, описывающий взаимосвязанные изменения параметров объединенной системы, будет нестационарным. Поэтому для введения информационных мер эффективности контроля и управления удобно воспользоваться понятиями количества информации в системе, скорости ее изменения и суммарным значением приращения информации в системе в течение определенного интервала времени.

Определим эти величины для системы, состоящей из двух статистически связанных стохастических подсистем, определяемых соответственно параметрами $x(t)$ и $y(t)$, которые являются непрерывными случайными функциями времени t.

Предполагаем, что для каждого момента времени существует совместная плотность вероятности $p\ (x, y, t)$ и энтропия

$$H(x,\ y,\ t) = -\int\int P(x,\ y,\ t)\ \ln\,[l_x\, l_y\, P\,(x,\ y,\ t)]\, dx\, dy\ \ldots, \qquad (1)$$

которые являются дифференцируемыми функциями времени; здесь l_x и l_y — некоторые масштабные коэффициенты.

Скорость изменения информации $V(t)$ и изменение информации $\Delta I(\Delta t)$ за время $\Delta t = t_2 — t_1$ определяем следующим образом:

$$V(t) = -\frac{d\,H\,(x,\ y,\ t)}{dt}; \qquad (2)$$

$$\Delta\, I\,(\Delta\, t) = \int_{t_1}^{t_2} V\,(t)\, dt. \qquad (3)$$

---

* А. Н. Колмогоров. Теория передачи информации.— Сессия Академии наук СССР по научным проблемам автоматизации производства. Пленарные заседания. М., «Наука», 1967.

Помимо изменения количества информации, согласно (3), может быть полезно произвести суммирование всех положительных приращений информации за определенный период времени. Полученная таким образом величина может, например, отражать эффективность управляющих воздействий.

Суммарное изменение всех положительных приращений информации в интервале времени $[t_1, t_2]$ определим следующим образом:

$$\delta I(\Delta t) = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,\Theta\,[V(t)]\,dt;$$

$$\Big\{\, 1 \text{ при } V(t) > 0;$$

падают.

Рассмотрим случай, когда функции $x(t)$ и $y(t)$ образуют двумерный нормальный процесс. Тогда совместная плотность вероятности, относящаяся к моменту времени t, равна

$$P(x, y, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_x(t)\,\sigma_y(t)\sqrt{1 - r_{xy}^2(t)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\,[1 - r_{xy}^2(t)]} \times \right.$$

$$\times\left[\frac{(x(t) - \bar{x}(t))^2}{\sigma_x^2(t)} - \frac{2r_{xy}(t)\,(x(t) - \bar{x}(t))\,(y(t) - \bar{y}(t))}{\sigma_x(t)\,\sigma_y(t)} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{(y(t) - \bar{y}(t))^2}{\sigma_y^2(t)}\right]\right\}, \qquad (5)$$

где $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ — математические ожидания случайных функций $x(t)$, $y(t)$, а $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$ — их дисперсии; $r_{xy}(t)$ — коэффициент корреляции.

Из (1), (2), (5) находим выражение для скорости изменения информации

$$V(t) = -\frac{d}{dt} \ln\left[\sigma_x(t)\,\sigma_y(t)\sqrt{1 - r_{xy}^2(t)}\right], \qquad (6)$$

а из (3) и (6) — выражение для изменения количества информации в интервале времени Δt

$$\Delta I(\Delta t) = -\ln \frac{\sigma_x(t_2)\,\sigma_y(t_2)}{\sigma_x(t_1)\,\sigma_y(t_1)} \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2(t_2)}{1 - r_{xy}^2(t_1)}}. \qquad (7)$$

Отметим, что если $|r_{xy}(t)| = 1$ или $|r_{xy}(t_2)| = 1$, то выражения (6) и (7) обращаются в бесконечность. Смысл этого состоит в том, что предполагается возможность установления полной корреляции между двумя системами, характеризуемыми непрерывными параметрами $x(t)$ и $y(t)$, что приводит к бесконечному изменению количества информации в объединенной системе $\{x(t), y(t)\}$.

В реальных условиях при наличии шумов обеспечить полную корреляцию (где совершенно строго выполняется равенство $r_{xy} = 1$) в системах с непрерывными параметрами практически невозможно.

Когда случайные функции $x(t)$ и $y(t)$ образуют нормальную двумерную функцию, то выражение (4) с помощью (6) можно представить так:

$$\delta I(\Delta t) = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \ln\left[\sigma_x(t)\,\sigma_y(t)\sqrt{1 - r_{xy}^2(t)}\right] \Theta\,[V(t)]\,dt. \tag{8}$$

Рассмотрим важный частный случай, когда можно пренебречь зависимостью величин σ_x, σ_y от времени. Тогда формулы (8) и (2) приобретают следующий вид:

$$\delta I(\Delta t) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{r_{xy}(t)\,\dot{r}_{xy}(t)}{1 - r_{xy}^2(t)}\,\Theta\,[V(t)]\,dt; \tag{9}$$

$$V(t) = \frac{r_{xy}(t)\,\dot{r}_{xy}(t)}{1 - r_{xy}^2(t)}. \tag{10}$$

Поскольку $r_{xy}^2(t) \leqslant 1$, то из (10) следует, что знак функции $V(t)$ определяется знаком произведения $\dot{r}_{xy}(t)\,r_{xy}(t)$.

Покажем, в частности, что при определенных дополнительных допущениях из (9) следует выражение для максимального значения величины $\frac{\delta I(\Delta t)}{\Delta t}$, аналогичное формуле Шеннона для максимальной пропускной способности канала с шумом. Будем считать, что двумерный случайный процесс $\{x(t),\ y(t)\}$ обладает мгновенным спектром, обрывающимся с достаточной степенью точности на некоторой частоте ω, зависящей, вообще говоря, от времени; однако ниже этой зависимостью в интервале времени $[t_1,\ t_2]$ будем пренебрегать. В соответствии с теоремой Котельникова введем на интервале $[t_1,\ t_2]$ точки отсчета t_α $(\alpha = 1,2,\ldots,n)$, число которых равно

$$n = 2\omega\Delta t + 1 \approx 2\omega\Delta t, \tag{11}$$

так как $\omega\Delta t \gg 1$; $\Delta t = t_2 - t_1$.

Предполагаем далее, что коэффициент корреляции $r_{xy}(t)$ принимает отличные от нуля и равные между собой значения $r_{xy}(t_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ лишь в точках отсчета. В этом случае производная коэффициента корреляции, имеющая δ-образный характер, в точках отсчета совпадает по знаку с коэффициентом корреляции $r_{xy}(t_\alpha)$. Из (10) имеем:

$$V(t_\alpha) < 0; \quad \Theta\,[V(t_\alpha)] = 1; \quad \alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда из (9) следует выражение для максимального значения величины

$$\delta I(\Delta t) = 2\omega\,\Delta t \ln\sqrt{1 - r_{xy}^2(t_\alpha)}\,. \tag{12}$$

Коэффициент корреляции $r_{xy}(t_\alpha)$, входящей в выражение (12), при сделанных выше допущениях можно выразить через дисперсии. Для этого учтем, что, согласно теореме Котельникова, непрерывные случайные функции $x(t)$ и $y(t)$ можно заменить в интервале Δt с достаточной степенью точности последовательностью коррелированных случайных величин x_α и y_α $(\alpha = 1,2,\ldots,n)$, определенных в точках отсчета t_α.

Корреляция между случайными величинами x_α и y_α определяется значением коэффициента корреляции $r_{xy}(t_\alpha) \equiv r_{xy}$ в точках отсчета.

Как известно, две случайные коррелированные величины x_α и y_α можно представить в следующем виде:

$$\Delta y_\alpha = a_\Delta x_\alpha + \Delta z_\alpha; \quad \overline{\Delta x_\alpha \Delta z_\alpha} = 0, \tag{13}$$

где

$$a = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}; \quad \sigma_z^2 = \sigma_y^2(1 - r_{xy}^2); \quad \Delta x_\alpha = x_\alpha - \overline{x}_\alpha; \quad \Delta y_\alpha = y_\alpha - \overline{y}_\alpha;$$

$$\Delta z = z_\alpha - \overline{z}_\alpha.$$

Находя отсюда коэффициент корреляции, равный

$$r_{xy} = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 - \sigma_z^2}{\sigma_y^2}},$$

и подставляя его в (12), получаем

$$\delta I(\Delta t) = \omega \Delta t \ln \frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2}. \tag{14}$$

Далее, учитывая, что в соответствии с (13) имеет место соотношение $\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2 + \sigma_z^2$, и вводя обозначения $\sigma_x^2 = P$ и $\sigma_z^2 = N$, найдем

$$\delta I(x)\,\omega\,\Delta t \ln \frac{a P + N}{N}. \tag{15}$$

Если $a=1$ (отметим, что при $\sigma_x = \sigma_y$ предположение $a=1$ обозначает выполнение равенства $r_{xy} = 1$), то из (15) имеем следующее выражение:

$$\frac{\delta I(\Delta t)}{\Delta t} = \omega \ln \frac{P + N}{N}, \tag{16}$$

совпадающее по форме с формулой Шеннона для максимальной скорости передачи информации в канале с шумом. Выражения (14) — (16) получены из (1), (2), (4) с помощью ряда специальных допущений, которые не всегда применимы в процессах контроля и управления. В связи с этим конкретные формулы для расчета величин $V(t)$, $\Delta I(\Delta t)$ и $\delta I(\Delta t)$, применимые в этих случаях, могут быть получены из соотношений (1) — (4) путем использования соответствующих выражений для $P(x, y, t)$ и коэффициента корреляции, которые отвечают рассматриваемым процессам контроля и управления.

Например, если для коэффициента корреляции двумерного нормального процесса принять выражение $r_{xy}(t) = A \sin\Omega t$, где $0 < |A| \leq 1$, то при условии, что величину $\frac{(t_2 - t_1)\,\Omega}{2\pi}$ можно считать целым числом, получаем с помощью (4) и (2) следующее выражение для $\delta I(\Delta t)/\Delta t$:

$$\frac{\delta I(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{A\,\Omega}{2\pi} \ln(1 - A^2). \tag{17}$$

Заметим, что при этом отнесенное к единице времени изменение информации, вычисленное по формуле (3), дает $\frac{\Delta I(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Отметим, что выражения (1) — (4) могут быть легко обобщены для многомерного случая.

Полученные выше выражения для информационных мер позволя-

Поступила в редакцию
7 декабря 1966 г.
окончательный вариант —
23 ноября 1967 г.