АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1968

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 62—50 : 519.25

А. Д. БОЛЫЧЕВЦЕВ
(Донецк)

АПОСТЕРИОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ АВАРИЙНОГО РЕЖИМА КОНТРОЛИРУЕМОГО ПРОЦЕССА

Пусть в некоторый момент времени t_0 получена информация о величине ординаты контролируемого процесса $X(t)$ и знаке его производной $V(t)$:

$$X(t_0)=C_0; \quad V(t_0) \geqslant 0. \tag{1}$$

Зная двух- и трехмерные плотности вероятностей $f(x, v/t_0)$ и $f(x, y, v/t_0, t_1)$ совместного распределения случайных величин $X(t_0)$, $V_t(t_0)$ и $X(t_0)$, $X(t_1)$, $V(t_0)$ соответственно, нетрудно определить вероятность нахождения процесса в момент времени t_1 выше некоторого фиксированного уровня C, большего, чем C_0:

$$P(t_1, t_0) = \int\limits_c^\infty \int\limits_0^\infty f(C_0, y, v/t_0, t_1)\, dy\, dv / \int\limits_0^\infty f(C_0, v/t_0)\, dv. \tag{2}$$

Это соотношение оказывается полезным при решении ряда конкретных физических задач. В частности, если под уровнем C понимать граничный технологический уровень, результат (2) показывает, какова вероятность аварийного или нежелательного режима по истечении времени $\tau=t_1-t_0$ после получения системой «предупредительного» сигнала.

Для стационарных контролируемых процессов функция $P(t_1, t_0)$ зависит только от взаимного расположения моментов времени t_1 и t_0 и имеет вид

$$P(t_1, t_0) = P(\tau) = \int\limits_C^\infty \int\limits_0^\infty f(C_0, y, v/\tau)\, dy\, dv / \int\limits_0^\infty f(C_0, v)\, dv. \tag{3}$$

Последнее выражение упрощается, если в начальный момент времени фиксируется только ордината процесса, а знак скорости остается неизвестным [ср. с условием (1)]:

$$P_0(\tau) = \int\limits_C^\infty f(y/C_0, \tau)\, dy. \tag{4}$$

Практически важным является нормальный стационарный случай. Обозначим

$$h = (\xi - R_x C_0) \Big/ \sqrt{2(1-R_x^2)}, \tag{5}$$

где ξ, c_0 и c (используется ниже) — нормированные уклонения:

$$\xi=(y-m)/\sigma; \quad c_0=(C_0-m)/\sigma; \quad c=(C-m)/\sigma; \tag{6}$$

здесь R_x — нормированная корреляционная функция процесса $X(t)$; m — математическое ожидание; σ^2 — дисперсия.

В этих обозначениях условная плотность вероятности $f(y/C_0, \tau)$ принимает вид

$$f(y \mid C_0, \tau) = e^{-h^2} / \sigma \sqrt{2\pi(1-R_x^2)}, \tag{7}$$

что после интегрирования по формуле (4) дает

$$2P_0(\tau) = 1 - \Phi(h_c), \tag{8}$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятностей

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du; \tag{9}$$

h_c — результат подстановки $\xi = c$ в сомножителе h:

$$h_c = (c - R_x C_0) \Big/ \sqrt{2(1 - R_x^2)}. \tag{10}$$

Итак, условная вероятность $P_0(\tau)$ описывается интегралом вероятностей и является функцией трех нормированных параметров: граничного уровня c, уровня сравнения c_0 и корреляционной функции $R_x = R_x(\tau)$. Последняя в неявном виде определяет зависимость от времени τ.

Аргумент h_c связывает воедино корреляционную функцию контролируемого процесса с уставками системы и может быть назван обобщенным параметром контроля.

В приложениях централизованного контроля и управления основной интерес представляет рассматриваемый ниже случай положительных c_0, что соответствует верхнему уровню сравнения. При переходе процессом нижнего уровня (c_0 — отрицательно) важно знать вероятность выброса за нижнюю границу: $c < c_0$. Результаты решения обеих задач для гауссова процесса одинаковы.

Общий вид функции $P_0(\tau)$ показан на рис. 1, *а*. При $\tau = 0$ $(R_x = 1)$ и значениях уровня c, строго больших c_0, функция равна нулю. При больших удалениях τ $(R_x \approx 0)$

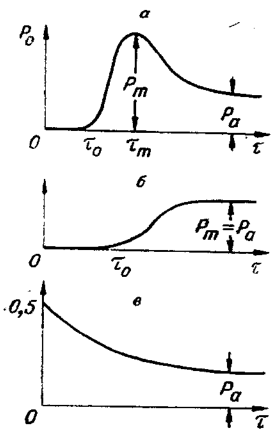

Рис. 1. Различные варианты поведения апостериорной вероятности $P_0(\tau)$:

$(0, \tau_0)$ — участок малых абсолютных значений функции; τ_m — абсцисса максимума $P_0(\tau)$; P_m — величина максимума; P_a — априорная вероятность нахождения процесса выше граничного уровня.

она обращается в априорную вероятность P_a нахождения процесса выше уровня c_0:

$$2P_a = 1 - \Phi(c/\sqrt{2}). \tag{11}$$

В точке τ_m, соответствующей значению $R_x = c_0 / c$, функция достигает максимума, удвоенная величина которого равна

$$2P_m = 1 - \Phi\left[\sqrt{(c^2 - c_0^2 / 2}\right]. \tag{12}$$

В частном случае нулевого уровня сравнения ($c_0 = 0$) максимум функции совпадает с установившимся значением P_a (см. рис. 1, *б*).

Для значений разности $c^2 - c_0^2 \lesssim 2$, т. е. удвоенных величин максимума $2P_m$, сравнимых с единицей, удобно выделить участок малых абсолютных значений функции, определив его верхнюю границу как ближайшую к оси ординат абсциссу τ_0 максимума кривизны $P_0(\tau)$. Соответствующие вычисления дают $h_c = \sqrt{3}$ и приближенное значение τ_0, выраженное через корреляционную функцию процесса:

$$R_x(\tau_0) = 1 - \frac{1}{12}(c - c_0)^2. \tag{13}$$

Наибольшее значение анализируемой вероятности на этом участке — величина второго порядка малости $2P_0(\tau_0) \approx 10^{-2}$. В случае, когда уровни c и c_0 совмещены, вероятность $P_0(\tau)$ описывается зависимостью

$$2P_0(\tau) = 1 - \Phi\left[c\sqrt{1 - R_x} \big/ \sqrt{2(1 + R_x)}\right], \tag{14}$$

представленной на нижнем графике рис. 1, *в*.

Обратимся теперь к случаю, описываемому формулой (3). Для нормального про-

$\int\limits_c$

Здесь

$$\varphi(\nu)=1-\Phi(\nu), \tag{16}$$

а аргумент ν определяется соотношением

$$\nu = R_v(\xi - R_x C_0) \Big/ \sqrt{2\Delta(1-R_x^2)} = ah; \tag{17}$$

при этом

$$\Delta = 1 - R_x^2 - R_v^2, \quad a = R_v \big/ \sqrt{\Delta};$$

R_v — нормированная корреляционная функция связи процесса и его производной; параметр h определяется выражением (5).

Сравнение выражений (15) и (4) показывает, что они совпадают друг с другом с точностью до весового коэффициента $\varphi(\nu)$.

Как следует из (17), знак аргумента ν совпадает со знаком R_v. Это позволяет найти оценку коэффициента $\varphi(\nu)$ во всем интервале изменения времени τ $(0, \infty)$*

$$1 \leqslant \varphi(\nu) \leqslant 2. \tag{18}$$

Оценка (18) показывает, что влияние коэффициента $\varphi(\nu)$ на величину изучаемой вероятности носит слабый «количественный» характер и качественные закономерности в поведении обеих функций $P_0(\tau)$ и $P(\tau)$ одинаковы.

После подстановок (16) и (17) в выражение (15) последнее принимает вид

$$P(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{h_c}^{\infty} [1-\Phi(ah)]\, e^{-h^2}\, dh. \tag{19}$$

Хотя интеграл (19) в общем виде не берется в элементарных функциях, легко находятся его граничные оценки

$$\frac{1}{2}[1-\Phi(ah_c)]\ [1-\Phi(h_c)] \leqslant P(\tau) \leqslant 1-\Phi(h_c), \tag{20}$$

построенные на рис. 2. В интервале $(0, \tau_m)$ верхняя и нижняя оценки близки друг к другу, а в интервале $(0, \tau_0)$ малых абсолютных значений $P(\tau)$ погрешности обоих приближений пренебрежимо малы.

Нижней граничной оценкой

$$P(\tau) = \frac{1}{2}[1-\Phi(ah_c)]\ [1-\Phi(h_c)] \tag{21}$$

удобно пользоваться в тех случаях, когда желательно описать поведение апостериорной вероятности $P(\tau)$ во времени одним аналитическим выражением. При надлежащем соотношении уровней c и c_0 эта оценка дает удовлетворительное приближение во всех точках τ. В большинстве же случаев предпочтительнее оперировать с верхней оценкой

$$P(\tau) = 1-\Phi(h_c), \tag{22}$$

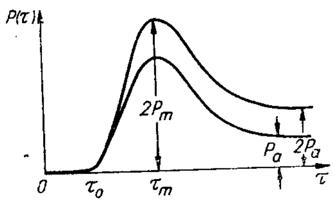

Рис. 2. Граничные оценки апостериорной вероятности $P(\tau)$.

ввиду ее простоты и точности в наиболее важном для приложений интервале начальных значений функции $P(\tau)$.

Поступило в редакцию
7 февраля 1967 г.,
окончательный вариант —
3 июня 1967 г.

* Предполагается, что в этом интервале $R_x(\tau)$ описывается монотонно убывающей функцией.