

$$P \left[ \frac{k-1}{m}, \frac{k}{m} \right] = P \left[ \frac{k}{m}, \frac{k+1}{m} \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{n-1} \frac{n}{m} (m-2) \right].$$

Тогда

$$H_n(x) = -(1-\varepsilon) \ln(1-\varepsilon) - \varepsilon \ln \frac{\varepsilon}{n-1};$$

$$H_m(x) = - \left( 1 - \frac{\varepsilon n (m-2)}{(n-1)m} \right) \ln \left( \frac{(n-1)m - \varepsilon n (m-2)}{2(n-1)m} \right) -$$

$$- \frac{(m-2)\varepsilon n}{(n-1)m} \ln \frac{\varepsilon}{(n-1)m}.$$

При

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad H_n(x) \rightarrow 0, \text{ а } H_m(x) \rightarrow \ln 2,$$

т. е. существует такое  $\varepsilon$ , что  $H_n < H_m$ .

Построенное распределение может быть использовано также для доказательства несуществования «эталонного» распределения величины  $x$  в классе всех распределений. Под эталонным распределением величины  $x$  понимается такое распределение  $F(x)$ , что если энтропия выходного сигнала одного прибора больше энтропии выходного сигнала другого прибора на  $F(x)$ , то это отношение сохраняется и на любом распределении. В самом деле, пусть такое распределение существует. Предположим, что на  $F(x)$  энтропия прибора с  $n$  делениями больше энтропии с  $m$  делениями и  $n > m$ . Тогда по определению эталонного распределения нельзя найти распределения такого, что  $H_n(x) < H_m(x)$ , но это противоречит построенному выше примеру. Если на  $F(x)$  энтропия прибора с  $m$  делениями больше энтропии прибора с  $n$  делениями, то тогда, вычисляя энтропию для равномерного распределения, получим  $H_n(x) = \ln n > \ln m = H_m(x)$ , т. е. опять приходим к противоречию.

Итак, энтропия выходного сигнала измерительного прибора не является монотонной функцией числа делений прибора, равномерно распределенных по шкале. Точно таким же образом этот факт можно установить и для некоторых других критериев, например для средней абсолютной погрешности и средней квадратичной погрешности. Следует отметить, что в практических условиях при достаточно большом числе делений добавление еще одного деления будет увеличивать энтропию выходного сигнала прибора и соответственно уменьшать средний квадрат и средний модуль ошибки. Однако при малом числе делений (контроль) ситуации, подобные описанной выше, могут иметь место и на практике.

Поступило в редакцию  
28 декабря 1966 г.

УДК 681.2.08

**В. В. ГУБАРЕВ**

(Новосибирск)

### К ВОПРОСУ О СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ШУМОВ КВАНТОВАНИЯ НОРМАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Максимальная эффективность замены непрерывных сигналов квантованными по уровню может быть достигнута только при правильном выборе квантующих устройств, т. е. типа квантователя и числа уровней квантования. В свою очередь, правильный выбор квантователя возможен только на основе знания тех или иных статистических характеристик шумов квантования — разности между выходным и входным сигналами квантователя.

Наибольшее внимание в литературе уделено конкретному анализу квантователя с выходной характеристикой, изображенной на рис. 1, а (для краткости назовем его квантователем I), хотя на практике не меньший интерес (см., например, [1]) представляет квантователь с характеристикой, показанной на рис. 1, б (квантователь II). С другой стороны, за исключением [2], в литературе рассматривается лишь случай,

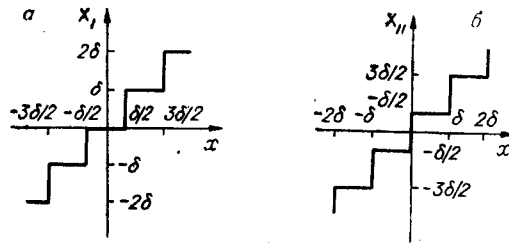


Рис. 1.

когда  $\beta \ll 1$ , где  $\beta$  — отношение шага квантования  $\delta$  к среднеквадратическому отклонению  $\sigma$  входного сигнала, что не всегда выполнимо на практике. Но в [2] описан только квантователь I и неудачно выбрана функция, аппроксимирующая коэффициент корреляции шума квантования, что приводит к существенным ошибкам.

В настоящей работе, приведены соотношения, пригодные как для относительно большого, так и для малого числа уровней квантователей обоих типов.

### Корреляционные функции

При нормальном стационарном сигнале с нулевым средним, дисперсией  $\sigma^2$  и коэффициентом корреляции  $\rho(\tau)$  на входе квантователя автокорреляционную функцию шума квантования можно представить

$$R_{\epsilon\epsilon}(\tau; \beta) = \frac{\beta^2 \sigma^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^{n+k}}{nk} \exp\left\{-\frac{2\pi^2 (n^2 + k^2)}{\beta^2}\right\} \text{sh} \frac{4\pi^2 nk \rho(\tau)}{\beta^2}, \quad (1)$$

а взаимную корреляционную функцию

$$R_{\xi\epsilon}(\tau; \beta) = 2\sigma^2 \rho(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \exp\left\{-\frac{2\pi^2 k^2}{\beta^2}\right\}, \quad (2)$$

где

$$\nu = \begin{cases} -1 & \text{для квантователя I;} \\ +1 & \text{для квантователя II.} \end{cases}$$

Из выражения (1) при  $\tau=0$  нетрудно получить соотношение для дисперсии шумов квантования

$$\sigma_{\epsilon}^2(\beta) = R_{\epsilon\epsilon}(0; \beta) = \frac{\beta^2 \sigma^2}{12} + \frac{\beta^2 \sigma^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^k}{k^2} e^{-\frac{2\pi^2 k^2}{\beta^2}} \quad (3)$$

На практике зачастую ограничиваются лишь теми значениями исходного нормального процесса, которые лежат в пределах  $-3\sigma \leq \xi \leq 3\sigma$ . Отсюда получаем максимально возможные значения  $\beta: \beta_{I\max} = 2; \beta_{II\max} = 3$ . Квантователь II с двумя уровнями квантования удобнее рассматривать как устройство с релейной выходной характеристикой и все необходимые соотношения для него получить из (1)–(3), производя соответствующую нормировку по оси ординат и полагая  $\beta \rightarrow \infty$ . Следовательно, практически можно рассматривать только квантование с  $\beta \leq 2$ , для которых с погрешностью не более 1% получаем

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \frac{\beta^2 \sigma^2}{12} = \frac{\delta^2}{12}, \quad (4)$$

$$R_{\xi\epsilon II}(\tau; \beta) = -R_{\xi\epsilon I}(\tau; \beta) = 2\sigma^2 \rho(\tau) e^{-\frac{2\pi^2}{\beta^2}}. \quad (5)$$

При  $\beta \leq 2$  с погрешностью не более 1% от текущего значения функции для всех

$$\rho_{\epsilon}(\tau) \geq 0,05 = \rho_{\epsilon}(\tau_{ка}) \quad (6)$$

имеем

$$\rho_{eI}(\tau; \beta) = \rho_{eII}(\tau; \beta) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \exp \left\{ -\frac{4\pi^2 k^2}{\beta^2} [1 - \rho(\tau)] \right\}. \quad (7)$$

Здесь  $\rho_e(\tau) = \frac{R_{ee}(\tau; \beta)}{R_{ee}(0; \beta)}$  — коэффициент корреляции шума.

Как следует из (4), (5) и (7), статистические характеристики обоих квантователей при  $\beta < 2$  совпадают. При этом дисперсия совпадает с поправкой Шеппарда для дисперсий, а  $|R_{ee}| < 0,015 \sigma^2 \rho$ ; т. е. шум квантования и выходной сигнал практически не коррелированы вплоть до  $\beta=2$ .

Используя выражение (13) из [3], с погрешностью менее 1% для всех  $(\tau) \leq \tau_{ке}$ , где  $\tau_{ке}$  — время корреляции, из (7) получаем

$$\rho_e(\tau; \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{12}{\sqrt{\pi} \beta} \sqrt{1 - \rho(\tau)} + \frac{12}{\beta^2} [1 - \rho(\tau)]; & \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \rho(\tau)} \leq 0,21 \\ -\frac{6}{\pi^2} \exp \left\{ -\frac{4\pi^2}{\beta^2} [1 - \rho(\tau)] \right\}; & \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \rho(\tau)} > 0,21. \end{cases} \quad (8)$$

На рис. 2, а представлены кривые зависимости коэффициентов корреляции шума квантования и входного сигнала. При  $\beta < 2$  коэффициент корреляции шума квантования с уменьшением  $\rho(\tau)$  убывает очень быстро и тем быстрее, чем меньше  $\beta$ . При  $\beta < 1$  он существует лишь при близких к единице  $\rho(\tau)$ . При больших значениях  $\beta$ , как следует из (3), дисперсия шума квантователя II возрастает быстрее дисперсии шума квантователя I, а нормированная автокорреляционная функция шума квантователя II с уменьшением  $\rho(\tau)$  спадает быстрее. При этом  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \rho_{eI}(\tau) = \rho(\tau)$ ,

$$a \lim_{\beta \rightarrow \infty} \rho_{eII}(\tau) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho(\tau) = \rho_{пол}(\tau),$$

где  $\rho_{пол}(\tau)$  — полярная корреляционная функция.

Зная коэффициент корреляции входного сигнала, при  $\beta \leq 2$  нетрудно получить значение времени корреляции шумов квантования, так как

$$\rho(\tau_{ке}) = 1 - 0,063 \beta^2. \quad (9)$$

Выражения (7) и (8), справедливые для любых рассматриваемых процессов, неудобны тем, что не дают явной связи коэффициента корреляции шума от  $\tau$ . Однако при всех  $\beta$ , для которых  $\rho(\tau) \leq \rho(\tau_{ке})$  представляется двумя первыми отличными от нуля членами ряда Маклорена с погрешностью 1—1,5%, с достаточной для практики точностью для всех  $\tau \leq \tau_{ке}$  можно принять при  $\beta \leq 2$ :

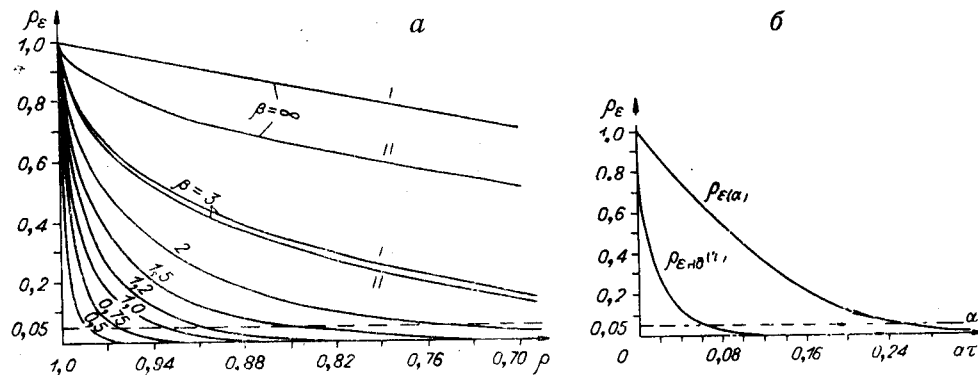


Рис. 2.

для дифференцируемых в среднеквадратическом процессах

$$\rho_{\epsilon д}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{12}{\sqrt{\pi} \beta} \sqrt{|\rho''(0)|} |\tau| + \frac{6}{\beta^2} |\rho''(0)| \tau^2; & |\tau| \leq \frac{0,3 \beta}{\sqrt{|\rho''(0)|}}; \\ \frac{6}{\pi^2} \exp\left\{-\frac{2\pi^2}{\beta^2} |\rho''(0)| \tau^2\right\}; & |\tau| > \frac{0,3 \beta}{\sqrt{|\rho''(0)|}}; \end{cases} \quad (10)$$

для недифференцируемых

$$\rho_{\epsilon нд}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{12}{\sqrt{\pi} \beta} \sqrt{|\rho'(0_+)|} |\tau| + \frac{12}{\beta^2} |\rho'(0_+)| \tau^2; & |\tau| \leq \sqrt{\frac{0,21 \beta}{|\rho'(0_+)|}}; \\ \frac{6}{\pi^2} \exp\left\{-\frac{4\pi^2}{\beta^2} |\rho'(0_+)| |\tau|\right\}; & |\tau| > \sqrt{\frac{0,21 \beta}{|\rho'(0_+)|}}; \end{cases} \quad (11)$$

где  $\rho'(\tau)$  и  $\rho''(\tau)$  — соответственно первая и вторая производные. Заметим, что для ряда сигналов это разложение в ряд справедливо даже для  $\beta \geq 1$  [например, для марковских сигналов и сигналов с равномерным в полосе  $(0 - f_b)$  спектром].

Как следует из выражений (10) и (11), при данных условиях форма кривой нормированной корреляционной функции шума квантования не будет зависеть ни от величины  $\beta$ , ни от вида корреляционной функции соответствующих входных сигналов, которые влияют лишь на масштаб по оси  $\tau$ .

При одинаковом масштабе по  $\tau$  корреляционная функция шума квантования недифференцируемых сигналов убывает значительно быстрее, чем для дифференцируемых. Сказанное иллюстрируется рис. 2, б, а также выражениями для радиуса

корреляции  $\tau_{0\epsilon} = \int_0^{\infty} \rho_{\epsilon}(\tau) d\tau$ , справедливыми при  $\beta \leq 2$  и выполнении условия

разложимости:

$$\tau_{0\epsilon д} = \frac{\beta}{6,86 \sqrt{|\rho''(0)|}} = \frac{1}{10,6 a_2}; \quad (12)$$

$$\tau_{0\epsilon нд} = \frac{\beta^2}{6\pi^2 |\rho'(0_+)|} = \frac{1}{6\pi^2 a_1}. \quad (13)$$

На рис. 2, б принят одинаковый масштаб по оси  $\tau$ , т. е.  $a_1 = a_2 = a$ . При этом рассмотрен случай, когда представление коэффициента корреляции  $\rho(\tau)$  первыми двумя значащими членами ряда Маклорена настолько точно, что кривая зависимости коэффициента корреляции шума квантования дифференцируемых сигналов в функции от  $a_2 \tau$  совпадает с кривой зависимости от  $a = \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \rho(\tau)}$  на всем интервале  $\tau \leq \tau_{к\epsilon}$ .

Если же условие разложимости не выполняется, кривые с увеличением аргумента будут расходиться и тем сильнее, чем прубее будет разложение при больших значениях  $\tau$ . Из выражения (13) при выполнении условия разложимости и  $\beta \leq 2$  нетрудно получить соотношения для времени корреляции шума квантования:

$$\tau_{к\epsilon д} = \frac{0,35 \beta}{\sqrt{|\rho''(0)|}}; \quad (14)$$

$$\tau_{к\epsilon нд} = \frac{0,063 \beta^2}{|\rho'(0_+)|}. \quad (15)$$

### Спектральная плотность

При выполнении условий разложимости, если  $\beta \leq 2$ , с погрешностью порядка 1% или меньше (для  $\beta \rightarrow 0$ ) имеем для обоих типов квантования: для дифференцируемых в среднеквадратическом процессах

$$S_{\epsilon\epsilon I, II}(\omega; \beta) = \frac{\beta^3 \sigma^2}{5\pi^2 \sqrt{|\rho''(0)|}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} e^{-\frac{\frac{1}{2} \omega^2}{k^2}}; \quad (16)$$

для недифференцируемых

$$S_{\varepsilon \varepsilon I, II}(\omega; \beta) = \frac{\beta^4 \sigma^2}{4\pi^4 |\rho'(0_+)|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4 + \gamma_1^2 \omega^2}. \quad (17)$$

Здесь  $S_{\varepsilon \varepsilon}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_{\varepsilon \varepsilon}(\tau) \cos \omega \tau d\tau$  — спектральная плотность мощности шумов квантования;

$$\gamma_2 = \frac{1}{4\pi a_2}; \quad \gamma_1 = \frac{1}{4\pi^2 a_1}.$$

Из (16) и (17) при  $\omega=0$  получаем:

$$S_{\varepsilon \varepsilon \text{ д}}(0; \beta) = \frac{\sigma^2 \beta^3}{41,2 \sqrt{|\rho''(0)|}}; \quad (18)$$

$$S_{\varepsilon \varepsilon \text{ нд}}(0; \beta) = \frac{\sigma^2 \beta^4}{36,5 \pi^2 |\rho'(0_+)|}. \quad (19)$$

Как видим, нулевая ордината спектра существенно зависит от величины  $\beta$ , причем для недифференцируемых процессов эта зависимость сильнее.

На рис. 3 в одинаковом масштабе по оси абсцисс, т. е. при  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$  построены зависимости нормированного спектра

$$s_{\varepsilon}(\omega; \beta) = \frac{S_{\varepsilon \varepsilon}(\omega; \beta)}{S_{\varepsilon \varepsilon}(0; \beta)}$$

от частоты  $\omega$ .

Как следует из (16) и (17) и рис. 3, форма кривой энергетического спектра шумов квантования при приведенных выше условиях не зависит ни от величины  $\beta$ , ни от формы спектра входных сигналов. Значение  $\beta$  и параметры входного сигнала влияют лишь на масштаб энергетического спектра по оси абсцисс и ординат, причем таким образом, что площадь кривой спектра остается постоянной, равной  $\frac{\pi \delta^2}{12}$ . При одинаковом масштабе по оси абсцисс спектр шумов недифференцируемых в среднеквадратическом сигналах шире, а, следовательно, нулевая ордината спектра меньше.

Из (16) и (17) нетрудно найти выражение для интегральной ширины спектра,

$$\text{определяемой как } \omega_{0\varepsilon} = \int_0^{\infty} s_{\varepsilon}(\omega; \beta) d\omega:$$

$$\omega_{0\varepsilon \text{ д}} = \frac{3,43 \pi \sqrt{|\rho''(0)|}}{\beta}; \quad (20)$$

$$\omega_{0\varepsilon \text{ нд}} = \frac{3\pi^3 |\rho'(0_+)|}{\beta^2}. \quad (21)$$

Из (16) и (17), также получаем соотношения для верхней частоты спектра, определяемой на уровне 0,05:

$$\omega_{\text{в } \varepsilon \text{ д}} = \frac{7,9 \pi \sqrt{|\rho''(0)|}}{\beta}; \quad (22)$$

$$\omega_{\text{в } \varepsilon \text{ нд}} = \frac{7,8 \pi^3 |\rho'(0_+)|}{\beta^2}. \quad (23)$$

В заключение отметим, что полученные результаты легко могут быть обобщены на случай других типов квантователей и сигналов с ненулевым математическим ожиданием.

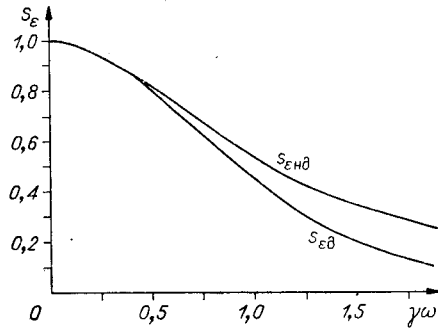


Рис. 3.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Домарацкий, Л. Н. Иванов, Е. Н. Карышев, Б. С. Синицын. Дискретная измерительная корреляционная система. Новосибирск, «Наука», 1965.
2. А. А. Косьякин. Учет эффекта квантования по уровню при статистическом анализе замкнутых цифровых автоматических систем.— Автоматика и телемеханика, 1966, № 5.
3. В. М. Ефимов. О корреляционной функции погрешности дискретности.— Автометрия, 1965, № 5.

*Поступило в редакцию  
2 декабря 1966 г.*

УДК 681.2.08

В. М. ЕФИМОВ

(Новосибирск)

### ОБ ОЦЕНКЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ШУМА КВАНТОВАНИЯ ПО УРОВНЮ

В [1] получена асимптотическая формула для оценки корреляционной функции шума квантования по уровню при  $\tau \rightarrow 0$ :

$$R_{\xi}(\tau) = \frac{\Delta^2}{12} - \frac{1}{2} \Delta |\bar{y}| + \frac{1}{2} \bar{y}^2, \quad (1)$$

где  $\Delta$  — шаг квантования по уровню;  $|\bar{y}|$ ,  $\bar{y}^2$  — первый абсолютный момент и дисперсия приращения  $y = x_{\tau} - x$  квантуемой величины  $x$  на отрезке времени  $\tau$ . Область применения оценки (1) можно расширить, вычислив к ней поправку. Воспользуемся для этого разложением зависимости шума квантования в ряд Фурье (см., например, [2]):

$$\xi(x) = \frac{\Delta}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin 2\pi m \frac{x}{\Delta}. \quad (2)$$

На основании (2) произведение  $\xi(x) \xi(x_{\tau})$  можно представить в виде

$$\xi(x) \xi(x_{\tau}) = r(\tau) + \varepsilon(\tau), \quad (3)$$

где

$$r(\tau) = \frac{\Delta^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2\pi k \frac{x_{\tau} - x}{\Delta};$$

$$\varepsilon(\tau) = -\frac{\Delta^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2\pi k \frac{x_{\tau} + x}{\Delta} + \frac{\Delta^2}{\pi^2} \sum_{\substack{k, m=1 \\ k+m}}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{km} \times$$

$$\times \sin 2\pi k \frac{x_{\tau}}{\Delta} \sin 2\pi m \frac{x}{\Delta}.$$

Для определения корреляционной функции шума квантования необходимо вычислить математические ожидания слагаемых в (3). Для первого слагаемого  $r(\tau)$  имеем