А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я
№ 3 1968

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

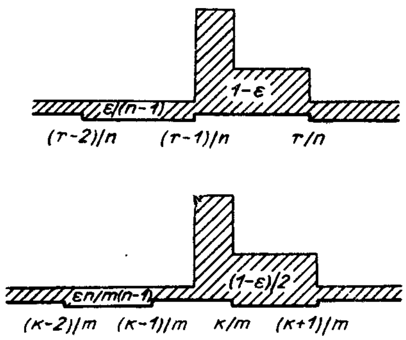
УДК 681.2.08

О. Е. ТРОФИМОВ
(Новосибирск)

# О ХАРАКТЕРЕ ЗАВИСИМОСТИ ЭНТРОПИИ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРИБОРА ОТ ЧИСЛА ДЕЛЕНИЙ ЕГО ШКАЛЫ*

В ряде работ, появившихся в последние годы и посвященных приложению теории информации к решению задач измерительной техники, приводятся соотношения для определения энтропии выходного сигнала измерительного прибора в зависимости от числа делений его шкалы. Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы показать, что эта энтропия не всегда является монотонной функцией числа делений. Точнее, будет показано следующее: для любых $m$ и $n$ таких, что $m<n$ и $n\neq lm$, где $l$ — натуральное число, можно построить распределение вероятности входной величины $F(x)$ такое, что $H_m(x)>H_n(x)$ (при условии, что деления по шкале распределены равномерно).

Действительно, пусть имеются два прибора с $n$ и $m$ делениями, равномерно распределенными по их шкале, причем $n>m$ и $n\neq lm$, где $l$ — натуральное число (см. рисунок). Тогда существуют такие натуральные числа $k$, $r$, что $k<m$, $r<n$ и $\frac{r-1}{n}<\frac{k}{m}<\frac{r}{n}$, т. е. в приборе с $m$ делениями существует уровень квантования, не совпадающий ни с одним из уровней квантования прибора с $n$ делениями.




Построим распределение вероятностей измеряемой величины $x$ такое, что энтропия выходного сигнала прибора с $m$ делениями $H_m(x)$ будет больше энтропии выходного сигнала прибора с $n$ делениями $H_n(x)$. Будем полагать, что величина $x$ распределена равномерно всюду, кроме интервала $\left[\frac{r-1}{n}, \frac{r}{n}\right]$, а вероятность попадания величины $x$ в этот интервал есть $P\left[\frac{r-1}{n}<x<\frac{r}{n}\right]=1-\varepsilon$.

Очевидно, что вероятности попадания величины $x$ в другие интервалы прибора с $n$ делениями равны $\frac{\varepsilon}{n-1}$. Нетрудно убедиться, что вероятности попадания величины $x$ во все интервалы прибора с $m$ делениями, кроме интервалов $\left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right]$ и $\left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right]$, равны $\frac{\varepsilon}{n-1}\,\frac{n}{m}$. Полагая, что в эти два последних интервала величина $x$ попадает с равной вероятностью, запишем

* Материал доложен на VIII Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений в сентябре 1966 года в Новосибирске.

$$P\left[\frac{k-1}{m}, \ \frac{k}{m}\right] = P\left[\frac{k}{m}, \ \frac{k+1}{m}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\varepsilon}{n-1}\ \frac{n}{m}(m-2)\right].$$

Тогда

$$H_n(x) = -(1-\varepsilon)\ln(1-\varepsilon) - \varepsilon \ln \frac{\varepsilon}{n-1};$$

$$H_m(x) = -\left(1 - \frac{\varepsilon\, n\,(m-2)}{(n-1)\, m}\right)\ln\left(\frac{(n-1)\, m - \varepsilon\, n\,(m-2)}{2\,(n-1)\, m}\right) - \frac{(m-2)\,\varepsilon\, n}{(n-1)\, m}\ln\frac{\varepsilon}{(n-1)\, m}.$$

При

$$\varepsilon \to 0 \qquad H_n(x) \to 0, \text{ а } H_m(x) \to \ln 2,$$

т. е. существует такое $\varepsilon$, что $H_n < H_m$.

Построенное распределение может быть использовано также для доказательства несуществования «эталонного» распределения величины $x$ в классе всех распределений. Под эталонным распределением величины $x$ понимается такое распределение $F(x)$, что если энтропия выходного сигнала одного прибора больше энтропии выходного сигнала другого прибора на $F(x)$, то это отношение сохраняется и на любом распределении. В самом деле, пусть такое распределение существует. Предположим, что на $F(x)$ энтропия прибора с $n$ делениями больше энтропии с $m$ делениями и $n>m$. Тогда по определению эталонного распределения нельзя найти распределения такого, что $H_n(x) < H_m(x)$, но это противоречит построенному выше примеру. Если на $F(x)$ энтропия прибора с $m$ делениями больше энтропии прибора с $n$ делениями, то тогда, вычисляя энтропию для равномерного распределения, получим $H_n(x) = \ln n > \ln m = H_m(x)$, т. е. опять приходим к противоречию.

Итак, энтропия выходного сигнала измерительного прибора не является монотонной функцией числа делений прибора, равномерно распределенных по шкале. Точно таким же образом этот факт можно установить и для некоторых других критериев, например для средней абсолютной погрешности и средней квадратичной погрешности. Следует отметить, что в практических условиях при достаточно большом числе делений добавление еще одного деления будет увеличивать энтропию выходного сигнала прибора и соответственно уменьшать средний квадрат и средний модуль ошибки. Однако при малом числе делений (контроль) ситуации, подобные описанной выше, могут иметь место и на практике.

*Поступило в редакцию
28 декабря 1966 г.*

---

УДК 681.2.08

*В. В. ГУБАРЕВ*

*(Новосибирск)*

## К ВОПРОСУ О СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ШУМОВ КВАНТОВАНИЯ НОРМАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Максимальная эффективность замены непрерывных сигналов квантованными по уровню может быть достигнута только при правильном выборе квантующих устройств, т. е. типа квантователя и числа уровней квантования. В свою очередь, правильный выбор квантователя возможен только на основе знания тех или иных статистических характеристик шумов квантования — разности между выходным и входным сигналами квантователя.