АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 3 1968

УДК 62-503

В. А. ВИТТИХ, А. Н. ГИНЗБУРГ
(Новосибирск)

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ СОКРАЩЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ*

В данной работе ставятся на обсуждение те проблемы теории сокращенного описания измерительных сигналов, которые представляются нам наиболее общими и важными.

Мы прежде всего определим, что понимается под избыточностью, устранение которой позволяет осуществить сокращенное представление непрерывных (или кусочно-непрерывных) функций, каковыми являются измерительные сигналы. Затем сформулируем подход к проблеме сжатия, который, на наш взгляд, является достаточно общим, и произведем анализ различных математических моделей сигналов. И, наконец, поставим на обсуждение вопрос о критериях близости сигнала и модели и кратко остановимся на критериях эффективности аппаратуры сжатия.

ИЗБЫТОЧНОСТЬ И КОЭФФИЦИЕНТ СЖАТИЯ

В теории информации существует понятие статистической избыточности источника информации. Статистическая избыточность определяется формулой

$$R = 1 - \frac{H}{H_{\max}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{D} p_i \log_2 p_i}{N \log_2 m}, \tag{1}$$

где $D = m^N$ — общее число возможных состояний источника; m — число уровней квантования каждой координаты; N — число координат на выходе источника (датчика); p_i — вероятность появления i-го состояния.

Величина

$$k = \frac{H_{\max}}{H} \tag{2}$$

* Материал доложен на I Всесоюзном симпозиуме по проблемам сокращения объема измерительной информации в феврале 1967 года в Новосибирске.

может быть названа коэффициентом сжатия. С учетом (2) формулу (1) можно переписать в виде

$$R = 1 - \frac{1}{k}. \tag{3}$$

Таким образом, понятие статистической избыточности применимо только к источникам с конечным числом состояний (например, к квантованным сигналам на выходах датчиков).

При определении избыточности источника непрерывного сигнала некоторые затруднения вызывает то обстоятельство, что понятие энтропии в этом случае теряет смысл, так как количество информации, содержащейся в непрерывной функции, всегда неограниченно велико. Речь может идти только о воспроизведении этой функции с определенной погрешностью ε и соответствующей этой погрешности ε-энтропии источника непрерывного сигнала. Понятие ε-энтропии было введено А. Н. Колмогоровым в [1]. Дальнейшее усовершенствование этого понятия было произведено А. Г. Витушкиным [2], который ввел понятия относительной и абсолютной ε-энтропии класса функций. В [2] показано, что абсолютная ε-энтропия $H^{\varepsilon}_{\text{абс}}$ совпадает с точной нижней гранью объема всевозможных таблиц функции, принадлежащей данному классу.

Прежде чем ввести понятие коэффициента сжатия k^{ε}, необходимо сделать следующее замечание. Коэффициент сжатия в общем случае есть отношение двух величин, которые представляют собой объемы таблиц, получаемые при двух различных способах описания непрерывного сигнала с точностью до ε. Таких способов описания может быть в принципе сколь угодно много. Поэтому можно дать и большое количество определений коэффициента сжатия. Однако для сравнения различных способов сокращенного описания сигналов следует выработать единую точку зрения по этому вопросу. Совершенно необходимо, по-видимому, договориться о том, объем какой таблицы следует брать в качестве величины $H^{\varepsilon}_{\max}$. С практической точки зрения нам представляется целесообразным использовать объем таблицы, получаемой при ступенчатой аппроксимации сигнала с постоянным шагом. В знаменателе выражения для k^{ε} должен стоять объем таблицы, получаемой при выбранном способе экономного описания сигналов:

$$k^{\varepsilon} = \frac{H^{\varepsilon}_{\max}}{H^{\varepsilon}}.$$

Так как предельное сжатие определяется ε-энтропией, то при указанных допущениях выражение для предельного сжатия, которое может быть получено за счет ε-избыточности функции заданного класса, имеет вид

$$k^{\varepsilon}_0 = \frac{H^{\varepsilon}_{\max}}{H^{\varepsilon}_{\text{абс}}}.$$

Понятие ε-избыточности может быть введено по аналогии с (3):

$$R^{\varepsilon} = 1 - \frac{1}{k^{\varepsilon}_0}.$$

Задача нахождения ε-избыточности в настоящее время решена лишь для некоторых классов функций [2], редко встречающихся в практике измерений. Кроме того, указание предельных возможностей сжатия еще не дает ответа на вопрос, как осуществить это сжатие. Решение этой задачи не менее затруднительно, чем осуществление оптимального статистического кодирования.

ОБЩИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ СЖАТИЯ

Кратко общий подход можно, на наш взгляд, сформулировать следующим образом: задача сокращенного представления измерительных сигналов сводится к построению таблиц, элементы которых являются параметрами выбранной математической модели сигналов (этими элементами могут быть, например, коэффициенты дифференциальных уравнений или коэффициенты разложения сигнала в ряд по выбранной системе базисных функций). Элементы таблицы и математическая модель определяют расшифровывающий алгоритм, используя который, мы можем восстановить сигнал с точностью до ε. Этот подход можно проиллюстрировать на трех блок-схемах, отражающих некоторые моменты технической реализации алгоритмов сжатия данных.

В первой схеме, приведенной на рис. 1, параметры $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ модели определяются в результате обработки сигнала $f(t)$ (или ансамбля

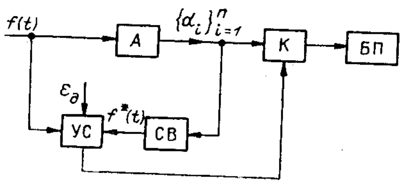

Рис. 1.

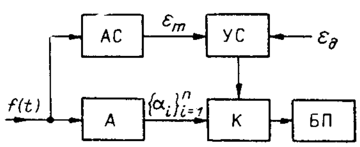

Рис. 2.

сигналов) по некоторому алгоритму А. В устройстве сравнения УС происходит сравнение исходного сигнала $f(t)$ и приближающего $f^*(t)$, восстановленного по рассчитанным значениям $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ в схеме восстановления СВ. В момент времени T, когда погрешность приближения (по выбранному критерию) становится равной допустимой $\varepsilon_д$, на ключевую схему К подается команда, по которой значения $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ запоминаются в буферной памяти БП, необходимой для осуществления упругой задержки. После этого рассмотренная процедура повторяется. Таким образом, в этой схеме предусматривается восстановление сигнала, а в ряде случаев это является нежелательным (например, когда требуется обеспечить высокое быстродействие).

На рис. 2 представлена схема, в которой ошибка приближения вычисляется на основе изучения структурных свойств самого сигнала при помощи анализатора сигнала АС. Здесь параметры модели вычисляются параллельно с вычислением ошибки. Восстановление сигнала отсутствует, и поэтому вторая схема позволяет обеспечивать высокое быстродействие, хотя уступает предыдущей в смысле точности и надежности.

В третьей блок-схеме (рис. 3) исходный сигнал сравнивается с набором его моделей $\{M_i\}_{i=1}^m$, которые хранятся в запоминающем устройстве. В устройстве сравнения происходит выбор наиболее «подходящей» модели, кодовый номер которой запоминается в буферной памяти БП. Устройства такого типа, основанные на сравнении, позволяют обеспечивать довольно высокое быстродействие, однако требуют больших объемов памяти.

Использование той или иной блок-схемы в значительной степени зависит от того, какое количество априорной информации о сигналах имеется у проектировщика системы сжатия. Первые две блок-схемы могут быть использованы при небольших ограничениях (например, при точно указанных динамическом диапазоне и максимальной скорости изменения сигналов). Последняя схема требует бо́льших сведений об исследуемом объекте и в этом смысле является менее гибкой.

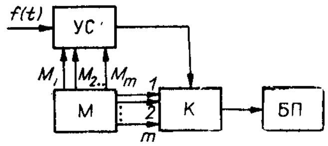

Рис. 3.

Может быть ситуация, когда об объекте имеется крайне мало информации и на основе априорных данных нельзя выбрать более или менее подходящую модель сигналов. В этом случае система сжатия должна строиться с использованием обучающихся устройств. По мере развертывания процессов мы должны получать все больше сведений о неизвестных параметрах, на основании которых совершенствовать выбранные ранее простые модели-гипотезы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ

Правильный выбор модели, наиболее адекватной реальным измерительным сигналам, позволяет создавать эффективные системы сжатия. Математическая модель должна удовлетворять целому ряду требований, таким, как обеспечение заданной точности восстановления сигналов, простота технической реализации, получение значительных коэффициентов сжатия и т. д.

Общего рецепта относительно выбора модели дать нельзя. Эта задача должна решаться в каждом конкретном случае с учетом специфики объекта и требует широкой оценки всей ситуации. Для удобства анализа можно разбить все модели на детерминированные и статистические. Мы считаем, что следует отдавать предпочтение статистическим моделям. Дело в том, что статистические модели в большей степени соответствуют реальным измерительным сигналам, так как учитывают случайный, вероятностный характер исходных данных. Строгий детерминизм неизбежно вступает в противоречие с экспериментами.

Необходимо учитывать помехи, которыми всегда сопровождаются реальные измерительные сигналы. Задача выделения полезного сигнала и определения статистических характеристик помехи сама по себе является довольно трудной. Не во всех случаях удается дать четкий ответ на вопрос, где полезный сигнал, а где помеха. Однако, как показывает практика измерений, большинство сигналов с достаточной точностью может быть описано следующей моделью:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(t) + \xi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

где $S(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(t)$ — полезный сигнал; c_i — неизвестные коэффициенты, которые надлежит определить;

$\{\varphi_i(t)\}_{i=0}^{n}$ — известные базисные функции; $\xi(t)$ — помеха.

Таким образом, мы здесь предполагаем, что полезный сигнал $S(t)$ практически без потерь в точности может быть описан полиномом n-й степени. В этом случае задача сжатия сводится к определению основных параметров приведенной формулы: системы базисных функций $\{\psi_i\ (t)\}$ максимальной степени аппроксимирующего полинома n, коэффициентов разложения $_i$ и величины отрезка аппроксимации, на котором ошибка приближения не превышает допустимой.

Задача оценки параметров c для указанной модели случайного процесса известна в статистике под названием оценки коэффициентов регрессии. Если известны статистические характеристики помехи (например, ее корреляционная функция), представляется возможным дать наилучшие оценки параметров c_i.

Следовательно, такой подход позволяет ставить задачу выделения сигнала на фоне случайных помех.

Несколько слов о достоинствах указанной выше модели. Прежде всего она универсальна, так как достаточно широкий класс сигналов может быть представлен рядом такого вида. Кроме того, использование полиномов целесообразно с точки зрения технической реализации, так как они позволяют получать довольно простые технические решения.

Мы рассмотрели сейчас модель одного сигнала. Однако положение усложняется существенно, если мы имеем дело с многоканальной системой. Здесь оказывается значительно труднее найти универсальную модель, подобную той, которая была рассмотрена для одного канала. Известно крайне малое число работ, в которых ставилась бы задача сокращенного описания многомерных сигналов. Можно отметить только работу [3], в которой показано, что эффект может быть увеличен за счет учета взаимокорреляционных связей между составляющими многомерного сигнала.

Трудности построения моделей многоканальных систем являются в общем-то объективными, ибо выявление взаимных связей между сигналами является само по себе сложной задачей, подчас такой анализ вообще невозможно произвести. Однако, на наш взгляд, это направление исследований в теории сокращенного описания сигналов является перспективным, и мы считаем, что во всяком случае для конкретных объектов можно построить модели многоканальных систем, которые могут существенно превосходить по эффективности системы сжатия, основанные на раздельном рассмотрении измерительных сигналов.

Для сравнения различных способов сокращенного описания сигналов необходимо иметь некую типовую модель сигнала. Отсутствие такой модели в настоящее время не дает возможности сопоставления систем сжатия по такому важному показателю, как коэффициент сжатия. В качестве такой модели мы предлагаем приведенную модель сигнала

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i (t) + \xi (t) \qquad (0 \leq t \leq T).$$

Коэффициенты c_i — случайные величины. При каждом значении мы имеем одну реализацию случайного процесса такого типа. Задавшись распределением коэффициентов, мы можем с помощью генератора случайных чисел получать их различные значения. При этом будем иметь различные реализации. При большом числе испытаний мы будем получать оценку коэффициента сжатия для заданных распределений коэффициентов c_i и для выбранной модели случайной помехи.

КРИТЕРИИ БЛИЗОСТИ СИГНАЛА И МОДЕЛИ

Как отмечалось выше, задача сокращенного представления сигналов сводится к приближенному их описанию при помощи некоторой математической модели. Выбор критерия близости сигнала и модели — тоже немаловажная проблема, и мы кратко остановимся на этом.

При формулировании требований к аппаратуре сжатия информации заказчик определяет и точность получаемых данных. Например, весьма распространенным является такое требование: ошибка приближения исходных сигналов по критерию равномерного приближения не должна превышать некоторой заданной величины $\varepsilon_д$, т. е.

$$\max |f(t) - \bar{f}(t)| \leqslant \varepsilon_д.$$

Такое требование ценой больших усилий в принципе может быть и удовлетворено. Однако оно вступает в противоречие с рядом других обстоятельств.

Во-первых, этот критерий противоречит вероятностной (случайной) природе помех, которыми всегда сопровождаются измерительные сигналы. Исходные данные сами по себе неточны, а мы используем для их описания «жесткий» критерий равномерного приближения. Если согласиться с этим требованием, то необходимо сразу отказаться от построения статистических моделей сигналов, подобных той, которая была приведена нами выше. Во что в конечном счете выливается это противоречие? Прежде всего оно приводит к тому, что коэффициенты сжатия, получаемые при использовании аппаратуры, в которую «заложен» такой критерий, оказываются небольшими. Кроме того, высокая точность такого приближения является только кажущейся, так как в получаемых данных, помимо информации о полезных сигналах, содержится большая доля сведений о помехе, а эти сведения являются избыточными. Таким образом, критерий равномерного приближения не позволяет ставить задачу об избирательном приближении к сигналу в смеси сигнала и помехи.

Необходимо ставить задачу о приближении именно к полезному сигналу, что позволит в конечном счете получать более достоверную информацию о состоянии объектов.

Во-вторых, критерий равномерного приближения вступает в противоречие с требованием простоты технической реализации методов сжатия данных. Дело в том, что для того чтобы ошибка аппроксимации сигнала ни в одной точке отрезка аппроксимации не превышала заданной, необходимо вычислять ее во всех точках отрезка. Совершенно очевидно, что такая операция требует огромных резервов памяти, особенно, если речь идет о многоканальной системе.

Здесь следует заметить, что на такой способ вычисления ошибки равномерного приближения никто не идет. При синтезе алгоритмов сжатия обычно высказывается предположение, что сигнал на отрезке аппроксимации описывается точно полиномом степени на один-два порядка большей, чем степень аппроксимирующего полинома. Это позволяет при вычислении ошибки приближения ограничиться рассмотрением в остаточных формулах интерполяции одного-двух членов, что позволяет создавать относительно простые устройства для контроля погрешности приближения.

Таким образом, за счет введенного допущения существует вероятность превышения допустимой ошибки, которая (вероятность), как показывают проведенные исследования, на практике оказывается чрезвычайно малой, такой, что в целом ряде задач ею можно пренебречь. Однако нам удается разменивать эту вероятность на упрощение аппаратуры сжатия, что чрезвычайно важно.

Мы считаем, что необходимо допускать некоторую вероятность превышения заданной ошибки приближения, так как такое допущение позволяет ставить задачу об избирательном приближении к полезному сигналу и получать более достоверную информацию. Кроме того, представляется возможным создавать более простые устройства для сокращения объема измерительной информации.

КРИТЕРИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ АППАРАТУРЫ СЖАТИЯ

Вопрос о критериях эффективности аппаратуры сжатия, безусловно, требует детального рассмотрения, и ему в принципе можно было бы посвятить отдельную статью. Однако в рамках настоящей работы мы лишь хотим поставить его на обсуждение.

Прежде всего необходимо отметить, что сжатие информации не является самоцелью. Коэффициент сжатия нельзя считать единственным показателем системы сжатия, по которому их можно сравнивать. Сжатие информации призвано улучшать некоторый показатель системы в целом.

В критерий эффективности должны входить такие характеристики аппаратуры сжатия, как сложность, надежность, коэффициент сжатия, помехоустойчивость, дальность линии связи и т. д. С какими, если так можно выразиться, «весами» будут входить в выражение для критерия эффективности указанные показатели систем сжатия, зависит от конкретных условий, в которых будет функционировать аппаратура сжатия. Например, при построении бортовых систем сжатия большое значение придается объему (сложности) кодирующей аппаратуры, в то время как для наземной аппаратуры ее объем не играет решающей роли. Поэтому мы не будем рассматривать различных критериев оценки эффективности аппаратуры сжатия, а остановимся на кратком рассмотрении основных показателей системы сжатия.

Что мы понимаем под коэффициентом сжатия, было определено выше. Теперь несколько слов о помехоустойчивости. Поскольку реальные измерительные сигналы сопровождаются помехами, необходимо строить системы сжатия, слабочувствительные к влиянию этих помех. В [4] предложен критерий помехоустойчивости для одного большого класса устройств сжатия — адаптивных дискретизаторов измерительных сигналов, который несколько отличается от критерия помехоустойчивости, принятого в теории связи, когда речь идет о передаче информации.

Важным показателем системы сжатия является ее сложность. Практика заставляет инженеров искать простые аппаратурные решения, использовать простые алгоритмы. Однако применение простейших алгоритмов еще не решает проблемы, так как это, как правило, связано с уменьшением коэффициента сжатия.

На практике инженеру-проектировщику представляется набор алгоритмов, отличающихся как по сложности реализации, так и по коэффициентам сжатия. Причем положение таково, что с увеличением сжатия увеличивается и сложность реализации. Чтобы корректно поставить задачу о выборе оптимального по сложности и коэффициенту сжатия алгоритма, следует найти числовой показатель сложности, по которому можно было бы сравнивать различные системы сжатия. Проблема эта достаточно сложна. Однако решение ее необходимо, ибо она является в настоящее время основным препятствием на пути создания эффективных систем сжатия данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем кратко свои позиции по основным вопросам теории сокращенного представления измерительных сигналов.

Предельно возможное сжатие непрерывных сигналов определяется их ε-избыточностью. В качестве максимального объема таблицы предлагается использовать количество бит, получаемое при ступенчатой аппроксимации сигнала с постоянным шагом.

Задача сокращенного представления сигналов в общем случае может рассматриваться как построение таблиц, элементы которых являются параметрами выбранной математической модели сигналов.

Статистические модели в большей степени соответствуют реальным измерительным сигналам, так как учитывают случайный характер исходных данных. С практической точки зрения наиболее удобной представляется модель в виде суммы полиномиального полезного сигнала и случайной помехи, которую мы предлагали использовать в качестве испытательной (типовой) модели сигнала.

Необходимо использовать вероятностные критерии близости сигнала и его модели, поскольку это позволяет ставить задачу об избирательном приближении к полезному сигналу в смеси сигнала и помехи.

Критерий эффективности аппаратуры сжатия должен включать в себя такие основные показатели, как сложность, надежность, коэффициент сжатия, помехоустойчивость, дальность линии связи (для телеметрических систем).

Необходимо найти пути объективной оценки сложности алгоритмов сжатия данных, так как эта проблема является в настоящее время основным препятствием на пути создания теории эффективных систем сокращенного представления измерительных сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров. ε-Энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах.— Успехи математических наук, 1959, т. 14, вып. 2.
2. А. Г. Витушкин. Оценка сложности задачи табулирования. М., Физматгиз, 1959.
3. А. Н. Свенсон, А. А. Смердов. О пропускной способности измерительных систем при передаче многомерного сигнала с коррелированными составляющими.— Автоматический контроль и методы электрических измерений (труды V конференции), т. II. Новосибирск, «Наука», 1965.
4. В. А. Виттих, А. Н. Гинзбург. Оценки помехоустойчивости адаптивных дискретизаторов измерительных сигналов.— Автометрия, 1967, № 4.

Поступила в редакцию
3 июля 1967 г.