

А. Н. ПОКРОВСКИЙ

(Новосибирск)

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ СООТНОШЕНИИ
 МЕЖДУ ИНТЕРВАЛАМИ КВАНТОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ
 И ПО АМПЛИТУДЕ ПРИ ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ
 СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Постановка задачи. В связи со все более широким применением цифровых измерительных и вычислительных систем приобретают актуальность вопросы, связанные с изучением ошибок при цифровых измерениях [1—5]. В процессе преобразования непрерывно изменяющихся величин в цифровой код производится квантование по времени (периодическое снятие отсчетов) и по амплитуде. Квантование приводит к уменьшению точности представления исходного процесса; в качестве меры погрешности, вносимой квантованием, можно использовать средний квадрат восстановления исходного процесса по цифровым отсчетам σ^2 .

Если пропускная способность C канала связи между преобразователем информации в цифровой код и ЦВМ ограничена, то средний квадрат ошибок представления процесса последовательностью чисел σ^2 не может быть сколь угодно малым. Минимальное значение $\sigma^2(T, \Delta)$ как функции интервала дискретности по времени T и по амплитуде Δ достигается при некоторых значениях T и Δ , которые будем считать в этом смысле оптимальными. В дальнейшем будем предполагать, что цифровой датчик-преобразователь имеет равномерную шкалу, т. е. интервал изменения квантованного сигнала $(-L, L)$ разбивается на равные части величины Δ , и значение входного сигнала заменяется ближайшим целочисленным значением. Это преобразование (кванто-

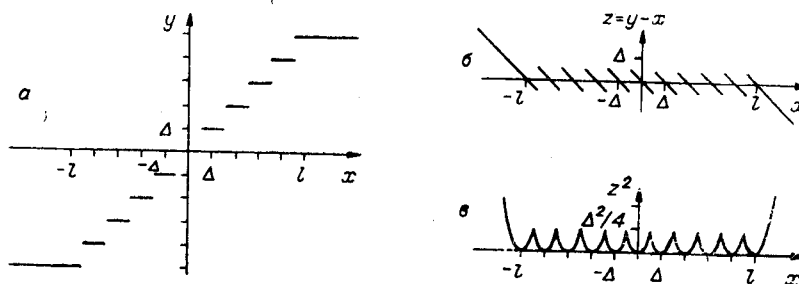


Рис. 1.

вание по амплитуде) эквивалентно нелинейному преобразованию сигнала функцией $y(x)$, изображенной на рис. 1, а.

Если количество уровней квантования составляет $N = \frac{2L}{\Delta} + 1$ (при нечетном N), то пропускная способность канала связи между преобразователем и ЦВМ при периодическом отсчете сигналов с периодом T должна быть не менее, чем

$$C = \frac{1}{T} \log_2 N = \frac{1}{T} \log_2 \left(\frac{2L}{\Delta} + 1 \right) \text{ бит/сек.} \quad (1)$$

В общем случае, выбирая уровни квантования оптимальным образом, можно при том же количестве уровней квантования N получить меньшие ошибки квантования случайного процесса, чем при равноотстоящих уровнях [2, 3]. Однако эта возможность обычно не используется в инженерной практике, поскольку незначительное увеличение точности достигается ценой существенного усложнения аппаратуры.

При дальнейшей обработке информации в ЦВМ в качестве текущего значения процесса используется обычно последнее измеренное значение. Вообще говоря, в ЦВМ процесс может подвергаться сглаживанию или экстраполяции; однако если по цифровым отсчетам можно восстановить исходный процесс достаточно точно, то ошибки экстраполяции или сглаживания определяются в основном свойствами самого процесса, а не ошибками квантования. Поэтому в качестве меры ошибок квантования принимаем средний квадрат ошибок восстановления процесса путем фиксации последнего измеренного значения.

За меру ошибок можно принять максимальную величину среднеквадратической ошибки на интервале дискретности T или среднеквадратическую ошибку, осредненную на этом интервале. Последующие вычисления проводятся только для первого случая, во втором случае формулы могут быть получены по той же схеме вычисления. Кроме того, при $T \rightarrow 0$ и выполнении условия (2) среднеквадратическая ошибка σ^2 во втором случае отличается от первого случая только множителем $1/2$ и малыми величинами высшего порядка относительно T .

В этой статье будут рассматриваться только стационарные нормальные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием и симметричное расположение уровней квантования. Из трех параметров квантования по амплитуде (количество уровней квантования N , интервал изменения квантованного сигнала $2L$, дискретность квантования Δ) только два независимы, поскольку $N = \frac{2L}{\Delta} + 1$ (для нечетных N).

В связи с этим есть три варианта минимизации σ^2 : при фиксированном N и переменном L (выбор оптимального масштаба квантования по амплитуде), при фиксированном L и переменном N (выбор оптимального числа двоичных разрядов в преобразователе непрерывной величины в код) и при варьировании L и N (оптимизация числа разрядов и масштаба преобразователя одновременно).

При фиксированном N и заданной максимальной величине C минимальный период квантования по времени T находится из формулы (1). После этого задача сводится к минимизации $\sigma^2(T, \Delta)$ как функции одной переменной. В частном случае, когда допустимо считать ошибки квантования по амплитуде не коррелированными с исходным процессом, эта задача решена в [2].

При фиксированном L и переменном N необходимо искать минимум $\sigma^2(T, \Delta, L)$ как функции двух переменных T, Δ при ограничении

$C(T, \Delta, L) \leq C = \text{const}$. Решая задачу на условный экстремум, получим зависимость $\sigma_{\min}^2(L, C)$ минимального значения дисперсии ошибки от уровня ограничения C при фиксированном L и соотношение между T и Δ , при котором этот минимум достигается: $T = f(\Delta, L)$.

Далее, разыскав минимум $\sigma_{\min}^2(L, C)$ как функции от L , найдем абсолютный минимум σ^2 при изменении одновременно N и L , а также зависимость $L_{\text{опт}}(C)$ оптимального масштаба преобразователя

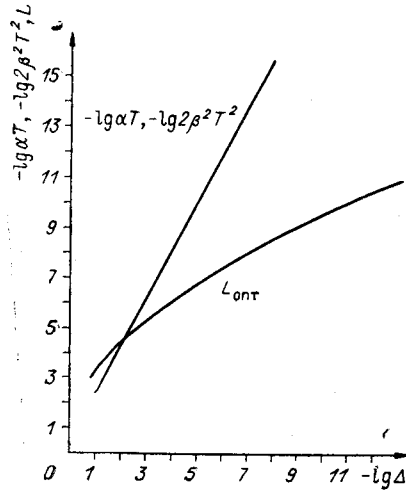


Рис. 2.

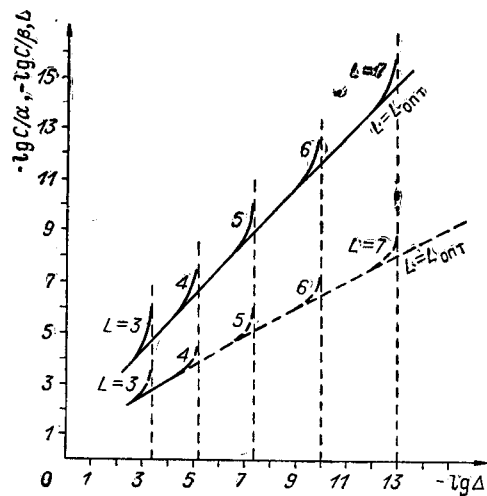


Рис. 3.

от уровня ограничения пропускной способности канала связи. Тем самым будет получено решение третьего варианта задачи.

Ниже производятся расчеты по описанной схеме при условиях $\Delta \ll 1$ и $T \rightarrow 0$; предполагается, что $1 - \rho(T)$ монотонно убывает при уменьшении T ($\rho(T)$ — нормированная автокорреляционная функция случайного процесса), и отбрасываются члены порядка Δ^3 во всех формулах. При этих предположениях удастся найти искомые зависимости в аналитическом виде; эти условия часто выполняются в практических задачах, когда ошибки квантования стремятся свести к незначительной величине. В остальных случаях решение задачи минимизации σ^2 можно получить численными методами, используя универсальные цифровые вычислительные машины.

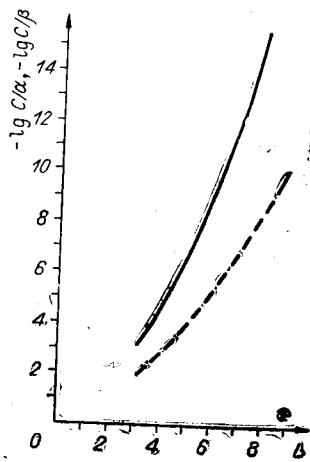


Рис. 4.

Точное решение задачи минимизации σ^2 . По описанной выше схеме были получены численными методами зависимости $T = T(\Delta, L)$, $\sigma^2 = \sigma^2(C, L)$ и $L_{\text{опт}} = f(C)$. Эти зависимости построены на рис. 2—4 в логарифмическом масштабе. Сплошными линиями показаны зависимости для $\rho(T) = e^{-\alpha |T|}$, штриховыми — зависимости для $\rho(T) = e^{-\beta^2 T^2}$. На рис. 2 обе кривые сливаются; заметная разница между ними появляется только при $\Delta > 0,1$ (на оси ординат в первом случае отложен $-\lg \alpha T$, во втором — $\lg 2 \beta^2 T^2$).

Вывод приближенных формул при $\rho(T) \approx 1 - \alpha|T|$. Исходя из (1), можно выразить T как функцию Δ, L :

$$T = T(\Delta, L) = \frac{1}{C} \log_2 \left(\frac{2L}{\Delta} + 1 \right). \quad (2)$$

Дифференцируя, найдем

$$\frac{\partial T}{\partial \Delta} = - \frac{T}{\Delta \left(1 + \frac{\Delta}{2L} \right) \ln \left(\frac{2L}{\Delta} + 1 \right)}. \quad (3)$$

Условие минимума σ^2 получим, приравняв производную от σ^2 нулю, причем производную определяем по правилу дифференцирования сложных функций, принимая, что

$$1 - \rho(T) = \alpha T + O(T^2) \ll 1 \quad (T > 0). \quad (4)$$

Из (4) и (22П)

$$\frac{d \sigma^2}{d \Delta} = \frac{\partial \sigma^2}{\partial \Delta} + \frac{\partial \sigma^2}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \Delta} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \Delta} = \frac{\Delta}{6} \{ 2\Phi(L) - 2[1 - \rho(T)] \varphi'(L) \}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial T} = 2\alpha \left[2\Phi(L) - \frac{\Delta^2}{12} \varphi'(L) \right]. \quad (7)$$

Считая, что величины $1 - \rho(T) = \alpha T$ и $\frac{\Delta^2}{12}$ малы по сравнению с единицей, и пренебрегая малыми членами в (6) и (7), из условия (5) получим зависимость между T и Δ :

$$\alpha T = \frac{\Delta^2}{12} \left(1 - \frac{\Delta}{2L} \right) \ln \left(\frac{2L}{\Delta} + 1 \right). \quad (8)$$

Эта зависимость в масштабе рис. 2 сливается с зависимостью, вычисленной по точным формулам; ошибка при использовании (8) не превосходит 1% при $\Delta \leq 0,1$. Подставив (4) и (8) в (22П) и отбросив малые слагаемые, вычислим зависимость σ^2 от Δ

$$\sigma^2 = 2\psi(L) + \frac{\Delta^2}{12} 2\Phi(L) \left[1 + 2 \left(1 + \frac{\Delta}{2L} \right) \ln \left(\frac{2L}{\Delta} + 1 \right) \right]. \quad (9)$$

а учитывая (1), найдем зависимость C от Δ

$$\frac{1}{\alpha} C = \frac{12}{\Delta^2 \left(1 + \frac{\Delta}{2L} \right) \ln 2}. \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) определяют зависимость σ^2 от C в параметрической форме. Графики этой зависимости при $L=3, 4, 5$ построены на рис. 3. При $\Delta < 0,1$ расчет по приближенным формулам приводит к ошибкам не более 1%. С другой стороны, при фиксированном C фор-

мулы (9) и (10) определяют зависимость σ^2 от L . Минимум σ^2 как функции от L достигается при условии

$$\psi'(L) + \frac{\Delta^2}{12} \left\{ \varphi(L) \left[1 + 2 \left(1 + \frac{\Delta}{2L} \right) \ln \left(\frac{2L}{\Delta} + 1 \right) \right] + \frac{2\Phi(L)}{L} \right\} = 0. \quad (11)$$

Формула (11) совместно с (10) определяет зависимость оптимального значения L от величины C ; эта зависимость построена на рис. 4 (сплошная линия).

Вывод приближенных формул при $\rho(T) \approx 1 - \beta^2 T^2$. Предполагая, что при малых T

$$1 - \rho(T) = \beta_2 T^2 + O(T^3) \ll 1, \quad (12)$$

пренебрегая малыми величинами порядка Δ^2 и T^2 , по сравнению с единицей, и повторяя выкладки предыдущего раздела, найдем условие минимума σ^2 при $L = \text{const}$:

$$2\beta^2 T^2 = \frac{\Delta^2}{12} \left(1 + \frac{\Delta}{2L} \right) \ln \left(\frac{2L}{\Delta} + 1 \right). \quad (13)$$

Подставляя (12), (13) в (22П) и отбрасывая малые слагаемые, получим минимальную величину дисперсии σ^2 :

$$\sigma^2 = 2\psi(L) + \frac{\Delta^2}{12} 2\Phi(L) \left[1 + \left(1 + \frac{\Delta}{2L} \right) \ln \left(\frac{2L}{\Delta} + 1 \right) \right], \quad (14)$$

а из (1) и (13) найдем зависимость между C и Δ :

$$\frac{1}{\beta} C = \frac{\sqrt{24}}{\Delta \ln 2} \sqrt{\frac{\ln \left(\frac{2L}{\Delta} + 1 \right)}{1 + \frac{\Delta}{2L}}}. \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) определяют зависимость между σ^2 и C в параметрической форме. Графики этой зависимости нанесены на рис. 3 (штриховые линии); в масштабе рисунка эти кривые сливаются с соответствующими кривыми, полученными по точным формулам численными методами.

При фиксированном C формулы (14) и (15) определяют зависимость σ^2 от L . Минимум σ^2 как функции от L достигается при условии

$$\psi'(L) + \frac{\Delta^2}{12} \left\{ \frac{2\Phi(L)}{L} + \varphi(L) \left[1 + \left(1 + \frac{\Delta}{2L} \right) \ln \left(\frac{2L}{\Delta} + 1 \right) \right] \right\} = 0. \quad (16)$$

Формулы (15) и (16) определяют зависимость оптимального значения L от величины C ; эта зависимость построена на рис. 4 (штриховая линия).

Следует отметить, что в рассматриваемом случае применение оптимальной экстраполяции может дать существенный выигрыш в среднеквадратической ошибке по сравнению с использованной здесь фиксацией последнего измеренного значения сигнала. В то же время при $\rho(T) \approx 1 - \alpha T$ ($T \rightarrow 0$) оптимальная линейная экстраполяция приводит к уменьшению σ^2 ($\sigma^2 = 0(T)$ при $T \rightarrow 0$) лишь на величину порядка T^2 .

Приложение

Вычисление среднего квадрата ошибки восстановления нормального стационарного случайного процесса по цифровым отсчетам. Без ограничения общности будем считать, что процесс $x(t)$ с нулевым математическим ожиданием имеет единичную дисперсию и корреляционную функцию $\rho(\tau)$, монотонно стремящуюся к единице при $\tau \rightarrow 0$. Исходный процесс подвергается нелинейному преобразованию функцией $y(x)$ (см. рис. 1, а), т. е. квантованию по амплитуде, а также квантованию по времени. Если в качестве экстраполированного значения сигнала используется последний цифровой отсчет, то дисперсия ошибок экстраполяции максимальна в конце интервала экстраполяции T (по крайней мере, при достаточно малых T) и равна

$$\sigma^2 = \overline{[y[x(t)] - x(t+T)]^2}, \quad (1\Pi)$$

где черта обозначает операцию вычисления математического ожидания.

Введем в рассмотрение функцию $z(x) = y(x) - x$ (см. рис. 1, б). Обозначая через $R_z(\tau)$ корреляционную функцию стационарного случайного процесса $z[x(t)]$, а через $R_{zx}(\tau)$ взаимную корреляционную функцию процессов $z[x(t)]$ и $x(t)$, перепишем (1\Pi) в виде

$$\sigma^2 = R_z(0) + 2[1 - \rho(T)] + 2[R_{zx}(0) - R_{zx}(T)]. \quad (2\Pi)$$

Взаимную корреляционную функцию $R_{zx}(\tau)$ можно вычислить по формулам [4, 5]:

$$R_{zx}(\tau) = b \rho(\tau); \quad (3\Pi)$$

$$b = b(\Delta, L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z(x) x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (4\Pi)$$

Подставляя (3\Pi) в (2\Pi), получим

$$\sigma^2 = R_z(0) + 2(1 + b)[1 - \rho(T)]. \quad (5\Pi)$$

При вычислении $b(\Delta, L)$ представим интеграл (4\Pi) в виде суммы пяти интегралов:

$$\begin{aligned} b = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z_0(x) x e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-L} z_0(x) x e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L^{\infty} z_0(x) x e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-L} x(x+L) e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L^{\infty} x(L-x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \end{aligned} \quad (6\Pi)$$

где $z_0(x)$ — периодическая функция, график которой представлен в центральной части рис. 1, б:

$$z_0(x) = \frac{\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{2\pi nx}{\Delta}. \quad (7\Pi)$$

Выполнив интегрирование в первом интеграле (6\Pi), получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z_0(x) x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{2\pi^2 n^2}{\Delta^2}}. \quad (8\Pi)$$

Эта величина при $\Delta \ll 1$ весьма мала и быстро убывает с уменьшением Δ . Так, например, уже при $\Delta=1$ величина (8\Pi) меньше, чем 10^{-8} , а при $\Delta=0,1$ — меньше, чем 10^{-800} .

Два последних интеграла (6П) равны между собой; интегрируя по частям, находим

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_L^{\infty} x(L-x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\Phi(L) - 1, \quad (9П)$$

где $\Phi(L)$ — интеграл вероятности:

$$\Phi(L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^L e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^L \varphi(x) dx, \quad (10П)$$

$$\text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Второй и третий интегралы в (6П) также равны между собой; чтобы оценить их величину, рассмотрим периодические функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$, такие что $z_2(x) = z_1(x)$ и $z_1'(x) = z_0(x)$. При $k\Delta - \frac{\Delta}{2} < x < k\Delta + \frac{\Delta}{2}$

$$z_1(x) = \frac{\Delta^2}{24} - \frac{(x - k\Delta)^2}{2}; \quad z_2(x) = \frac{\Delta^2}{24} (x - k\Delta) - \frac{(x - k\Delta)^3}{6}. \quad (11П)$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L^{\infty} z_0(x) x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z_1(x) x e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_L^{\infty} + \\ & + \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z_2(x) \frac{d}{dx} (x e^{-\frac{x^2}{2}}) \right]_L^{\infty} - \frac{1}{2\pi} \int_L^{\infty} z_2(x) \frac{d^2}{dx^2} \times \\ & \times (x e^{-\frac{x^2}{2}}) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta^2}{24} L e^{-\frac{L^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} (x e^{-\frac{x^2}{2}}) dx z_2(x). \end{aligned} \quad (12П)$$

Учитывая, что $|z_2(x)| \leq \frac{\Delta^3}{48\sqrt{3}}$, интеграл в (12П) можно оценить как

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L^{\infty} z_2(x) \frac{d^2}{dx^2} (x e^{-\frac{x^2}{2}}) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta^3}{48\sqrt{3}} (L^2 - 1) e^{-\frac{L^2}{2}} \\ & \qquad \qquad \qquad \text{при } L > \sqrt{3}; \\ & \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L^{\infty} z_2(x) \frac{d^2}{dx^2} (x e^{-\frac{x^2}{2}}) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta^3}{48\sqrt{3}} [4e^{-\frac{3}{2}} - (L^2 - 1) e^{-\frac{L^2}{2}}] \\ & \qquad \qquad \qquad \text{при } L < \sqrt{3}. \end{aligned} \quad (13П)$$

Теперь можно привести формулу (6П) к виду

$$b = b(\Delta, L) = [2\Phi(L) - 1] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L e^{-\frac{L^2}{2}} \frac{\Delta^2}{12} + O(\Delta^3). \quad (14П)$$

Величина $R_z(0)$ вычисляется по формуле [4, 5]:

$$R_z(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (15\Pi)$$

График функции $z^2(x)$ представлен на рис. 1, в. Интеграл разбивается на пять слагаемых:

$$\begin{aligned} R_z(0) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z_0^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-L} z_0^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L^{\infty} z_0^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-L} (L+x)^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L^{\infty} (L-x)^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned} \quad (16\Pi)$$

Четвертый и пятый интегралы равны между собой и вычисляются интегрированием по частям:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L^{\infty} (x-L)^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (L^2 + 1) \left[\frac{1}{2} - \Phi(L) \right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L e^{-\frac{L^2}{2}}. \quad (17\Pi)$$

Первый интеграл (16\Pi) вычислим, подставляя выражение

$$-2z_2(x) = z_0^2(x) - \frac{\Delta^2}{12} = \frac{\Delta^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos \frac{2\pi nx}{\Delta} \quad (18\Pi)$$

и интегрируя почленно; в результате получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z_0^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\Delta^2}{12} + \frac{\Delta^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-\frac{2\pi^2 n^2}{\Delta^2}}, \quad (19\Pi)$$

причем сумма экспонент в (19\Pi) при $\Delta \ll 1$ исчезающе мала. Второй и третий интегралы (16\Pi), равные между собой, вычисляем, используя (18\Pi), (11\Pi):

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L^{\infty} z_0^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{\Delta^2}{12} \left[\frac{1}{2} - \Phi(L) \right] - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_L^{\infty} z_2(x) \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad (20\Pi)$$

$$\left| \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_L^{\infty} z_2(x) \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta^3}{24\sqrt{3}} e^{-\frac{L^2}{2}}.$$

Учитывая (17\Pi), (19\Pi) и (20\Pi), запишем выражение для $R_z(0)$:

$$R_z(0) = \frac{\Delta^2}{12} 2\Phi(L) + 2\psi(L) + O(\Delta^3), \quad (21\Pi)$$

где

$$\psi(L) = (L^2 + 1) \left[\frac{1}{2} - \Phi(L) \right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L e^{-\frac{L^2}{2}}.$$

После этого, исходя из (5П), можно написать явное выражение для σ^2 ,

$$\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12} 2\Phi(L) + 2\psi(L) + 2[1 - \rho(T)] \left\{ 2\Phi(L) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L e^{-\frac{L^2}{2}} \frac{\Delta^2}{12} \right\} + O(\Delta^3), \quad (22П)$$

которое является хорошим приближением к точному выражению (5П):

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & 2\psi(L) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L z_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + 2[1 - \rho(T)] \times \\ & \times \left[2\Phi(L) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L z_0(x) x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]. \end{aligned} \quad (23П)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. А. Купершмидт. Оптимальный выбор частоты отсчетов при цифровых измерениях.— Измерительная техника, 1962, № 10.
2. I. M a x. Quantizing for minimum Distortion.— Trans. IRE, 1960, v. IT-6, № 1.
3. А. И. Величкин. Среднеквадратическая ошибка при квантовании непрерывных сообщений с шумом.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1964, № 4.
4. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
5. А. А. Первозванский. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
1 августа 1966 г.