АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 2 1968

УДК 620.08.001

И. М. ШЕНБРОТ
(Москва)

О МЕТОДИЧЕСКОЙ ОШИБКЕ ЦИФРОВОГО ИЗМЕРЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Методическая ошибка цифрового измерения случайного процесса обусловлена двумя факторами: квантованием измеряемой величины по уровню и дискретностью измерения во времени, приводящей к необходимости применения экстраполяции. Известен ряд работ, посвященных статистическому исследованию как ошибки квантования по уровню [1—4], так и ошибки временной дискретности измерения [5—9]. Однако для нахождения полной методической ошибки цифрового измерения требуется совместное рассмотрение обеих ошибок. Такой анализ был проведен в [5] только для одного частного случая, а именно: измерения гауссова процесса с фиксированным началом цифровой шкалы, совмещенным с математическим ожиданием измеряемого процесса, и с применением ступенчатой экстраполяции. В настоящей работе находятся статистические характеристики полной методической ошибки цифрового измерения при более общих предпосылках.

ОШИБКА КВАНТОВАНИЯ ПО УРОВНЮ

С точки зрения влияния на ошибку квантования по уровню способы цифрового преобразования разбиваются на два основных класса: 1) начало цифровой шкалы фиксировано, что характерно для прямого сравнения мгновенного значения преобразуемой физической величины x с эталонной величиной той же физической природы, равной iq, где q — цена одного кванта, а i — число квантов в эталонной величине; $i=0, 1, \ldots, n$; 2) начало цифровой шкалы случайно. Последнее положение имеет место при развертывающем преобразовании мгновенного значения физической величины в интервал времени и заполнении этого интервала импульсами постоянной частоты, источник которых не синхронизирован с началом развертки. Близко к истине предположение о том, что распределение в интервале от нуля до промежутка времени между началом развертки и первым импульсом заполнения равномерно.

Квантование по уровню с фиксированным началом цифровой шкалы будем называть квантованием 1-го рода, а квантование со случайным, равномерно распределенным началом цифровой шкалы — квантованием 2-го рода.

Если начало цифровой шкалы фиксировано, то между значениями ошибки квантования по уровню y и измеряемой величины x существует функциональная связь

$$y = u\left(\frac{q}{2} - x\right)(-x) + \sum_{i=0}^{n} \gamma_q (x - iq)(iq - x) + \\ + u\left[x - \left(n + \frac{1}{2}\right) q\right](nq - x), \tag{1}$$

где $u(x)$ — единичная ступенчатая функция, равная нулю при $x<0$ и единице при $x \geqslant 0$, а $\gamma_q(x)$ — функция «окна», равная единице для x, лежащих в интервале от $-q/2$ до $q/2$, и нулю для всех остальных x. График функциональной зависимости (1) представлен на рис. 1.

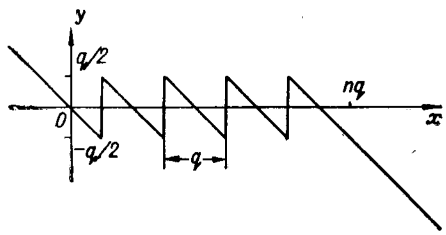

Рис. 1.

Обратная функциональная зависимость x от y многозначна и на каждом интервале от $(i-1/2)q$ до $(i+1/2)q$ $(i=0, \ldots, n)$ имеет вид

$$x_{(i)} = \gamma_q(y)(iq - y). \tag{2}$$

Отсюда находим распределение ошибки квантования 1-го рода

$$w_y(y) = u\left(-\frac{q}{2} - y\right) w_x(-y) + \gamma_q(y) \sum_{i=0}^{n} w_x(iq - y) + \\ + u\left[y - \left(n + \frac{1}{2}\right) q\right] w_x(nq - y), \tag{3}$$

где $w_x(x)$ — распределение вероятностей измеряемой величины X.

Чем меньше величина кванта q и чем меньше вероятность того, что измеряемая величина X (здесь и в дальнейшем будем обозначать прописной буквой случайную величину, а той же строчной буквой — ее значение) окажется за пределами шкалы, т. е. примет значения $x<0$ или $x>nq$, тем ближе распределение $w_y(y)$ к равномерному в пределах, для которых функция $\gamma_q(y)$ отлична от нуля [1, 2] с дисперсией $q^2/12$.

Практически шкала цифрового преобразователя выбирается так, чтобы вероятностью того, что измеряемая величина X принимает значения, лежащие за пределами шкалы, можно было пренебречь. Поэтому в дальнейшем для упрощения выкладок будем опускать первое и последнее слагаемые в сумме (3), записывая ее в виде

$$w_y(y) = \gamma_q(y) \sum_{i=0}^{n} w_x(iq - y). \tag{4}$$

Это выражение отличается от выведенного в [1] только пределами суммирования, что, однако, при принятом выше допущении несущественно.

Для квантования 2-го рода уже не существует однозначной функциональной связи (1) между ошибкой квантования y и измеряемой величиной x, которая после развертывания во времени принимает только неотрицательные значения, лежащие в пределах от 0 до nq.

Рассмотрим, как происходит квантование по уровню путем заполнения временного интервала x равномерно следующими с периодом q

импульсами. Если внутрь интервала x попадает k импульсов, то цифровой отсчет (квантованное значение) берется равным kq. При одном и том же значении x, принимаемом величиной X в пределах шкалы измерения, значение ошибки y может быть отрицательным (или в крайнем случае равным нулю)

$$y_a = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_q \left[x - \left(i + \frac{1}{2}\right) q\right] (iq - x) \leqslant 0 \tag{5}$$

либо неотрицательным, равным

$$y_b = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_q \left[x - \left(i + \frac{1}{2}\right) q\right] [(i+1)\, q - x] \geqslant 0. \tag{6}$$

Вероятность отсчета $iq<x$ для iq, лежащих между iq и $(i+1)q$, составляет

$$p_{a(i)} = \frac{(i+1)\, q - x}{x - iq + (i+1)\, q - x} = i + 1 - \frac{x}{q}, \tag{7}$$

а вероятность отсчета $(i+1)q>x$ для тех же x равна

$$p_{b(i)} = \frac{x - iq}{x - iq + (i+1)\, q - x} = \frac{x}{q} - i. \tag{8}$$

Просуммировав $p_{a(i)}$ и $p_{b(i)}$ по всем i от 0 до $n-1$, получим вероятность того, что ошибка y определяется по (5), как

$$p_a(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_q \left[x - \left(i + \frac{1}{2}\right) q\right] \left(i + 1 - \frac{x}{q}\right), \tag{9}$$

а вероятность того, что y определяется по (6), —

$$p_b(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_q \left[x - \left(i + \frac{1}{2}\right) q\right] \left(\frac{x}{q} - i\right). \tag{10}$$

Графики зависимостей (5), (6), (9) и (10) показаны на рис. 2.

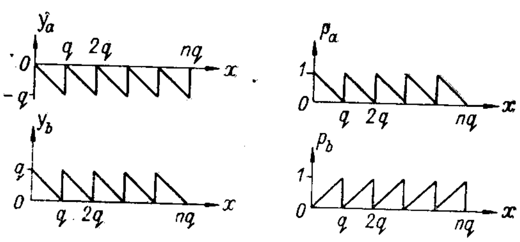

Рис. 2.

Совместное распределение измеряемой величины X и ошибки квантования 2-го рода Y выражается как

$$w_{2xy}(x, y) = w_x(x) \{\delta [y - y_a(x)]\, p_a(x) + \delta [y - y_b(x)] \times p_b(x)\}, \tag{11}$$

где $\delta(y)$ — дельта-функция Дирака. Отсюда распределение ошибки Y находится как

$$w_y(y) = \gamma_q \left(y + \frac{q}{2}\right)\left(1 + \frac{y}{q}\right) \sum_{i=0}^{n-} w_x(iq - y) + \gamma_q \left(y - \frac{q}{2}\right)\left(1 - \frac{y}{q}\right) \sum_{i=0}^{n-1} w_x [(i+1)\, q - y]. \tag{12}$$

В том случае, когда вероятностью выхода измеряемой величины за пределы шкалы можно пренебречь, пределы суммирования расширяются в бесконечность и формула (12) сокращается до записи

$$w_y(y) = \left[\gamma_q\left(y + \frac{q}{2}\right)\left(1 + \frac{y}{q}\right) + \gamma_q\left(y - \frac{q}{2}\right)\left(1 - \frac{y}{q}\right)\right] \times \\ \times \sum_{i=-\infty}^{\infty} w_x(iq - y). \qquad (13)$$

Чем меньше квант q для фиксированного распределения $w_x(x)$, тем меньше сказывается влияние формы распределения $w_x(x)$ и тем ближе распределение ошибки квантования к треугольному [10]

$$w_y(y) = \frac{1}{q}\left[\gamma_q\left(y + \frac{q}{2}\right)\left(1 + \frac{y}{q}\right) + \gamma_q\left(y - \frac{q}{2}\right)\left(1 - \frac{y}{q}\right)\right] \qquad (14)$$

с дисперсией $q^2/6$.

Нетрудно убедиться, что математическое ожидание ошибки квантования 2-го рода в отличие от квантования 1-го рода равно нулю [4, 11, 12].

Дисперсию квантования по уровню часто бывает удобнее выразить не через распределение, а через характеристическую функцию измеряемой величины $F_x(s)$. Это удается сделать в том частном случае, когда можно пренебречь вероятностью выхода измеряемой величины X за цифровую шкалу. Тогда выражение (1), переписанное в виде

$$y = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_q(x - iq)(iq - x), \qquad (15)$$

может быть разложено в ряд Фурье:

$$y = \frac{q}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \sin\frac{2\pi i x}{q}. \qquad (16)$$

В [2] и [3] это разложение использовано для вычисления дисперсии ошибки Y. Учитывая, что

$$M\left(\sin\frac{2\pi ix}{q}\right) = \frac{1}{2j}\left[F_x\left(\frac{2\pi i}{q}\right) - F_x\left(-\frac{2\pi i}{q}\right)\right], \qquad (17)$$

получаем, что математическое ожидание ошибки Y равно

$$M(y) = \frac{q}{2\pi j} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} F_x\left(\frac{2\pi i}{q}\right). \qquad (18)$$

Дисперсия $D(y) = \sigma_y^2$ находится для квантования 1-го рода как

$$\sigma_{y\mathrm{I}}^2 = \frac{q^2}{4\pi^2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{i+k+1}}{ik} \left\{F_x\left[\frac{2\pi(i+k)}{q}\right] - F_x\left(\frac{2\pi i}{q}\right)F_x\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right\}, \qquad (19)$$

что после некоторых преобразований, приведенных в приложении, может быть записано в более компактном виде:

$$\sigma^2_{y\mathrm{I}} = \frac{q^2}{12}\left[1 + \frac{12}{\pi^2}\left\{\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}F_x\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + \left[\frac{1}{2}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}F_x\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right]^2\right\}\right]. \quad (20)$$

Аналогично найдем дисперсию для ошибки квантования 2-го рода. Введем обозначение

$$f(x) = \frac{y}{q} = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i}\sin\frac{2\pi ix}{q}. \quad (21)$$

Для рассматриваемого случая бесконечной цифровой шкалы

$$y_a = q\,[f(x+q/2) - 1/2]; \quad y_b = q\,[f(x+q/2) + 1/2]. \quad (22)$$

Вероятности ошибок y_a и y_b в этом случае выражаются через функцию (21) как

$$p_a(x) = 1/2 + f(x+q/2); \quad p_b(x) = 1/2 - f(x+q/2). \quad (23)$$

Дисперсия ошибки квантования 2-го рода теперь находится в виде

$$\sigma^2_{y\mathrm{II}} = \frac{q^2}{4}\left\{1 + \frac{1}{\pi^2}\sum_{\substack{i=-\infty\\i\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{ik}F_x\left[\frac{2\pi(i+k)}{q}\right]\right\}, \quad (24)$$

что после преобразований, аналогичных приведенным в приложении, упрощается до записи*

$$\sigma^2_{y\mathrm{II}} = \frac{q^2}{6}\left[1 - \frac{3}{\pi^2}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{k^2}F_x\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right]. \quad (25)$$

МЕТОДИЧЕСКАЯ ОШИБКА ЦИФРОВОГО ИЗМЕРЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

При дискретном во времени измерении вместо фактического значения измеряемого процесса $x(t)$ в текущий момент времени t находится значение $x_0(t)$, которое определяется как функция некоторого числа результатов дискретного измерения $x_k^*(t_k)$, где $k=1,\ldots,m$ (при фильтрации по конечному прошлому число m конечно).

При оперативном измерении, когда значение $x_0(t)$ нужно находить как можно ближе к моменту времени t, всегда $t_k \leqslant 1$, так что операция определения $x_0(t)$ по $x_k^*(t_k)$ представляет собой экстраполяцию. Широко применяют наиболее простой метод экстраполяции, а именно — ступенчатую экстраполяцию [5—9], распространяя на интервал времени до ближайшего измерения результат последнего измерения.

* Результат, сходный с (25), получен также в [13].

Обозначим экстраполирующую оценку измерения как $x_0=L(x)$, где x — вектор с m компонентами x_k $(k=1, \ldots, m)$. Поскольку при каждом измерении в момент времени t_k вносится ошибка квантования по уровню Y_k, аргументы оценки L равны

$$X_k^* = X_k + Y_k. \tag{26}$$

Полная методическая ошибка цифрового измерения V определяется как разность

$$V = L\,[\mathbf{X}^*(t)] - X(t). \tag{27}$$

Пользуясь общими методами, нетрудно найти распределение полной методической ошибки V в виде

$$w_v(v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial x_m^*}{\partial x_0}\right| w_{m+1}\{x_0^* - v,\ \theta(x_1^*), \ldots, \theta(x_{m-1}^*),$$

$$\theta\left[\mu(x_1^*, \ldots, x_{m-1}^*, x_0^*)\right]\}\, dx_0^*\, dx_1^* \ldots dx_{m-1}^*, \tag{28}$$

где $w_{m+1}(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ — совместное распределение измеряемого случайного процесса X в $m+1$ точке $t, t_1, \ldots, t_m$; $\theta(x_k^*)$ — выражение x_k из уравнения

$$x_k^* = x_k - \varphi(x_k), \tag{29}$$

причем функция φ определяет зависимость ошибки квантования y_k от квантуемой величины x_k, например, по (1); μ — обратная функция, выражающая аргумент x_m функции L через $x_1^*, \ldots, x_{m-1}^*$ и x_0^*; отсутствие суммы по участкам зависимости μ в (28) указывает на предполагаемую однозначность этой обратной зависимости.

Аналогичное, но еще более громоздкое, чем (28), выражение можно получить и для распределения ошибки V при квантовании 2-го рода.

Предположим, что во всех точках измерения в моменты времени $t_1, \ldots, t_m$ осуществляется цифровое измерение с квантованием 1-го рода при одинаковых квантах q; однородное преобразование в разные моменты времени обычно и имеет место в системах цифрового измерения. Кроме того, допустим, что преобразование L линейно и имеет вид

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k. \tag{30}$$

Тогда удобно ввести понятие полной ошибки квантования Y, такой, что полная ошибка цифрового измерения равна

$$V = Y + Z, \tag{31}$$

где Z — ошибка экстраполяции по неквантованным измерениям. При этом оказывается, что для линейного преобразования L ошибка Y составляет

$$Y = L(\mathbf{y}) = L(y_1, \ldots, y_m). \tag{32}$$

Исходя из (31), для характеристики ошибки V в рамках корреляционной теории достаточно знать первые два момента ошибок Y и Z и их ковариацию B_{yz}. Оставив в стороне достаточно известный вопрос о вычислении моментов Z (см., например, [14]), обратимся к моментам Y и ковариации B_{yz}. Для квантования 1-го рода

$$M(\dot{y}) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k M(y_k). \tag{33}$$

Далее, поскольку составляющие y_k ошибки Y в (32) коррелированы, для вычисления дисперсии Y приходится пользоваться общей формулой

$$D(y) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \lambda_r \lambda_s \int_{-q/2}^{q/2} \ldots \int_{-q/2}^{q/2} y_r y_s \sum_{i=1}^{n} w_{mx}(iq - y_1, \ldots, iq - y_m) \times$$
$$\times dy_1 \ldots dy_m - M^2(y), \tag{34}$$

где w_{mx} — m-мерное распределение измеряемого процесса X. Для ковариации B_{yz} при квантовании 1-го рода справедлива формула

$$B_{yz} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \int_{-q/2}^{q/2} \ldots \int_{-q/2}^{q/2} \int_{-\infty}^{\infty} y_k \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{r=1}^{m} \lambda_r (iq - y_r) - x_0 \right] \times$$
$$\times w_{(m+1)x}(x_0, iq - y_1, \ldots, iq - y_m)\, dx_0\, dy_1 \ldots dy_m, \tag{35}$$

где $w_{(m)+1x}$ —$(m+1)$-мерное распределение процесса X. В частном случае ступенчатой экстраполяции ($m=1$, $\lambda_1=1$)

$$B_{yz} = \int_{-q/2}^{q/2} \int_{-\infty}^{\infty} yz \sum_{i=1}^{n} w_{2x}(iq - y, iq - y - z)\, dz\, dy. \tag{36}$$

Что касается квантования 2-го рода, то из (11) ясно, что ковариация между ошибкой квантования Y и измеряемой величиной X равна нулю, а отсюда следует некоррелированность ошибок квантования 2-го рода с измеряемой величиной. Эта некоррелированность имеет важное значение для упрощения вычисления дисперсии полной методической ошибки цифрового измерения. Действительно, дисперсия полной ошибки при применении квантования 2-го рода оказывается равной

$$\sigma_v^2 = \sigma_z^2 + \sigma_y^2, \tag{37}$$

причем дисперсия полной ошибки квантования по уровню в случае линейности преобразования $L(x)$ в соответствии с (30) есть линейная функция дисперсий частных ошибок квантования по уровню:

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2 \sigma_{yk}^2. \tag{38}$$

В заключение приведем выражения для распределения полной методической ошибки цифрового измерения V при ступенчатой экстраполяции. Для квантования 1-го рода имеем

$$w_v(v) = \int_{-q/2}^{q/2} \sum_{i=0}^{n} w_{2x}(iq - y, iq - v)\, dy, \tag{39}$$

а для квантования 2-го рода

$$w_v(v) = \frac{1}{q}\int_0^q \sum_{i=1}^{n} \{y\, w_{2x}[iq - y, (i-1)q - v] + (q+y)\, w_{2x}(iq - y,\ iq - v)\}\, dy. \qquad (40)$$

Приложение

Для преобразования формулы (19) заменим индекс суммирования k на $k-i$ (эта замена допустима, так как ряд сходится); тогда имеем

$$\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{i+k+1}}{ik} F_x\left[\frac{2\pi(i+k)}{q}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} F_x\left(\frac{2\pi k}{q}\right) \times \sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0,\, k}}^{\infty} \frac{1}{i(k-i)}. \qquad (1П)$$

Для вычисления суммы по i в правой части (1П) разобьем ее на два ряда, которые после замены знака индекса суммирования в первом ряде объединим:

$$S(k) = \sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq k}}^{1} \frac{1}{i(k-i)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{\infty} \frac{1}{i(k-i)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{\infty} \frac{1}{i(k-i)} - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq -k}}^{\infty} \frac{1}{i(k+i)}. \qquad (2П)$$

При $k \neq 0$

$$S(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq |k|}}^{\infty} \left[\frac{1}{i(k-i)} - \frac{1}{i(k+i)}\right] - \frac{1}{2k^2} = -2\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq |k|}}^{\infty} \frac{1}{i^2 - k^2} - \frac{1}{2k^2}. \qquad (3П)$$

Пользуясь асимптотическим разложением [15]

$$\operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - i^2}, \qquad (4П)$$

свертываем сумму по i, определяя ее как

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq |k|}}^{\infty} \frac{1}{i^2 - k^2} = \lim_{x\to k}\left(\frac{1}{x^2 - k^2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - i^2}\right) = \frac{3}{4k^2}, \qquad (5П)$$

так что

$$S(k) = -\frac{2}{k^2}; \qquad k \neq 0. \qquad (6П)$$

В случае $k=0$ [15]

$$S(0) = -2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = -\frac{\pi^2}{3}. \qquad (7П)$$

Подставляя (6П) и (7П) в (1П) и имея в виду, что $F_x(0)=1$, получим окончательно формулу (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Дунин-Барковский, И. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). М., Гостехиздат, 1955.
2. А. А. Косякин. Статистическая теория квантования по уровню.— Автоматика и
... мировский. Вероятностные методы в измерительной технике. М., Изд-во Стандартов, 1964.
6. Э. Л. Ицкович. Определение необходимой частоты измерений величин при дискретном контроле. — Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 2.
7. Я. А. Купершмидт. Оптимальный выбор частоты отсчетов при цифровых измерениях.— Измерительная техника, 1962, № 10.
8. И. М. Шенброт. Графоаналитическое определение среднего квадрата методической ошибки дискретного измерения.— Измерительная техника, 1963, № 8.
9. В. М. Ефимов. Об одной методике определения интервала времени между отсчетами при цифровом измерении.— Автометрия, 1965, № 3.
10. Э. И. Гитис. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств. М., Госэнергоиздат, 1961.
11. И. М. Шенброт. Минимизация ошибки цифрового интегрирования при централизованном контроле.— Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 8.
12. С. М. Персин. Исследование некоторых методов повышения точности цифровых измерительных систем. Автореф. канд. дисс. Л., 1966.
13. М. Л. Езерский, А. М. Куперман. О выборе шага квантования по уровню и по времени при цифровом осреднении.— Автометрия, 1967, № 4.
14. А. М. Яглом. Введение в теорию стационарных случайных функций.— Успехи математических наук, 1952, т. 7, вып. 5.
15. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
10 октября 1966 г.,
окончательный вариант —
13 марта 1967 г.