

А. П. ИВАНОВА, С. Е. ТКАЧ

(Новосибирск)

**ПОГРЕШНОСТИ
ДВУХКАНАЛЬНЫХ ФАЗОИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ,
ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПОМЕХ***

ВВЕДЕНИЕ

Фазовые методы измерений, обеспечивая высокую точность, нашли широкое применение в радиотехнике, акустике, электрических методах разведки полезных ископаемых и в других областях.

Несмотря на большие потенциальные возможности, реализовать высокую точность фазоизмерительных систем на практике затруднительно из-за большого количества погрешностей, которым эти системы подвержены. В то время как методические и аппаратные погрешности фазоизмерительных систем в настоящее время достаточно хорошо исследованы, погрешностям, обусловленным воздействием случайных помех, уделялось сравнительно мало внимания.

Исследования по влиянию случайных помех на фазоизмерительные системы проводились для отдельных моделей сигналов без учета многозначности отсчетов фазометров [1—4]. В указанных работах рассмотрены статистические свойства гармонических и флюктуирующих сигналов и помех при определенных сочетаниях исходных параметров. Некоторые результаты этих работ использовать для практических расчетов довольно трудно.

В имеющейся литературе не рассматривались статистические свойства разности фаз шумоподобных сигналов и помех, которые довольно часто встречаются на практике, в частности, при разведке полезных ископаемых методом естественных электромагнитных полей.

В настоящей работе определяются обусловленные воздействием нормальных помех погрешности измерения разности фаз шумоподобных сигналов, являющихся более общей моделью сигнала, чем гармонические и флюктуирующие по амплитуде. Погрешности определяются с учетом многозначности отсчетов фазометров при любом сочетании исходных параметров сигналов и помех. Производится сравнение статистических свойств разности фаз для различных моделей сигналов и помех.

* Материал доложен на VIII Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений в сентябре 1966 года в Новосибирске.

ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА И ИСХОДНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

используются избирательные фильтры, что дает возможность на входе фазометра считать помехи узкополосными. В дальнейшем также предполагается, что сигналы и помехи в каналах системы стационарны.

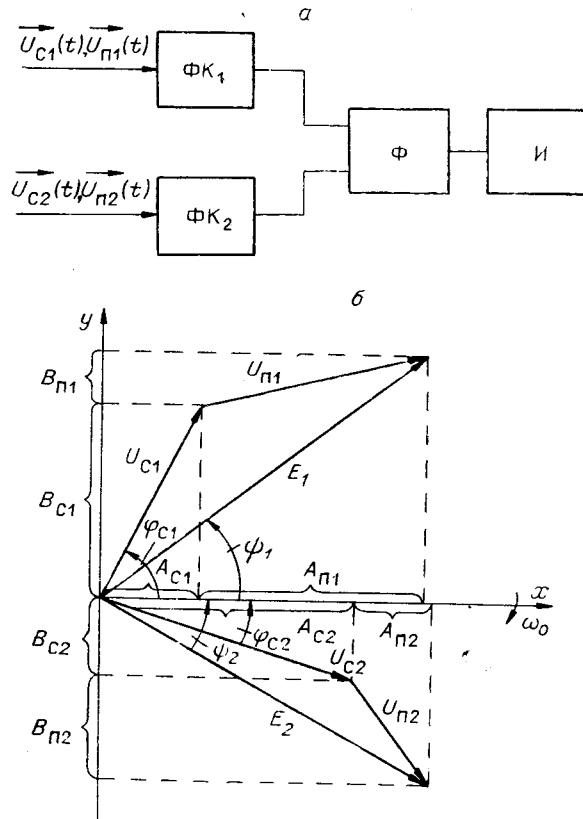


Рис. 1.

При анализе фазовых соотношений сигналы и помехи целесообразно представлять в виде векторов в декартовой системе координат (см. рис. 1, б). Каждый вектор характеризуется амплитудой (длина вектора) и фазой (угол, отсчитываемый от оси x до вектора против часовой стрелки). Для исключения из рассмотрения частоты сигнала и средней частоты помехи предположим, что векторная диаграмма вращается с этой частотой по часовой стрелке (см. рис. 1, б). В этом случае амплитуды и фазы сигналов и помех будут медленно меняющимися величинами [5].

На векторной диаграмме приняты обозначения: $U_{c1,2}$ — амплитуды сигналов; $U_{п1,2}$ — амплитуды помех; $E_{1,2}$ — амплитуды суммарных

векторов сигнал+помеха; $\varphi_{c1,2}$ — фазы сигналов; $\varphi_{n1,2}$ — фазы помех; $\varphi_p = \varphi_{c2} - \varphi_{c1}$ — разность фаз сигналов («истинная» разность фаз); $\psi_p = \psi_2 - \psi_1$ — разность фаз суммарных векторов сигнал+помеха (измеряемая разность фаз); $\Delta\varphi = \psi_p - \varphi_p$ — погрешность измерения разности фаз сигналов, обусловленная воздействием помех.

Введем три исходных статистических параметра, которые в дальнейшем будут полностью определять значения погрешностей измерения разности фаз сигналов при наличии помех.

1. Отношение сигнал/помеха по мощности (черта обозначает статистическое осреднение):

$$q_1 = \frac{\overline{U_{c1}^2}}{\sigma_{n1}^2} \text{ (первый канал); } q_2 = \frac{\overline{U_{c2}^2}}{\sigma_{n2}^2} \text{ (второй канал).}$$

2. Коэффициент взаимной корреляции сигналов (стрелкой обозначен вектор, а знаком * — комплексно сопряженный вектор):

$$\vec{P}_{c12} = \overline{\vec{u}_{c1}(t) \vec{u}_{c2}^*(t)}.$$

3. Коэффициент взаимной корреляции помех:

$$\vec{P}_{n12} = \overline{\vec{u}_{n1}(t) \vec{u}_{n2}^*(t)}.$$

Коэффициент взаимной корреляции случайных векторов является в общем случае комплексной величиной. Он имеет модуль и «фазу». Нетрудно показать, что если амплитуда и фаза процесса независимы, то модуль коэффициента взаимной корреляции представляет собой статистическое среднее амплитуд помех, а «фаза» является статистическим средним разности фаз:

$$\vec{P}_{12} = \overline{U_1(t) e^{-j\varphi_1(t)} U_2(t) e^{+j\varphi_2(t)}} = \overline{U_1(t) U_2(t) e^{j[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)]}};$$

$$P_{12} = \overline{U_1(t) U_2(t)}; \quad \gamma = \overline{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)} = \overline{\varphi_p}.$$

Коэффициент взаимной корреляции можно записать еще таким образом:

$$\vec{P}_{12} = P_{12} e^{j\gamma} = P_{12} \cos \gamma + j P_{12} \sin \gamma = R + j S;$$

$$P_{12} = \sqrt{R^2 + S^2}; \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{S}{R}.$$

Можно различать помехи с комплексным, действительным ($S=0$, $\gamma=0$), мнимым ($R=0$; $\gamma = \frac{\pi}{2}$) и нулевым ($R=0$; $S=0$; фаза неопределенна) коэффициентами взаимной корреляции. Коэффициент взаимной корреляции помех в каждом конкретном случае можно определить, исследуя механизм образования шума в каналах фазоизмерительной системы.

В зависимости от условий работы фазоизмерительной системы на ее вход могут поступать гармонические сигналы, амплитуда и фаза которых постоянна, сигналы с флюктуирующей амплитудой и постоянной фазой, а также шумоподобные сигналы, амплитуда и фаза которых флюктуирует.

ОДНОМЕРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗНОСТИ ФАЗ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ

Наиболее полное описание свойств случайного процесса дает его многомерный закон распределения. Для стационарного случайного процесса в большинстве случаев достаточно знать его одномерный закон распределения и функцию автокорреляции.

Определим закон распределения разности фаз шумоподобных сигналов и помех. Для проекций векторов сигнал+помеха на оси координат можно записать:

$$\begin{aligned} A_1 &= E_1 \cos \psi_1 = A_{c1} + A_{n1}; & A_2 &= E_2 \cos \psi_2 = A_{c2} + A_{n2}; \\ B_1 &= E_1 \sin \psi_1 = B_{c1} + B_{n1}; & B_2 &= E_2 \sin \psi_2 = B_{c2} + B_{n2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Поскольку помехи нормальны, их проекции на оси координат также распределены нормально. Распределение мгновенных значений шумоподобного сигнала также можно описать нормальным законом. В результате система случайных величин (A_1, B_1, A_2, B_2) подчиняется нормальному закону распределения и полностью определяется матрицей вторых моментов:

$$M = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & 0 & R & S \\ 0 & \sigma_1^2 & -S & R \\ R & -S & \sigma_2^2 & 0 \\ S & R & 0 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}$$

Здесь

$$\sigma_1^2 = \sigma_{c1}^2 + \sigma_{n1}^2 = \overline{A_1^2} = \overline{B_1^2}; \quad \sigma_2^2 = \sigma_{c2}^2 + \sigma_{n2}^2 = \overline{A_2^2} = \overline{B_2^2}.$$

Нетрудно также показать, что

$$\overline{A_1 A_2} = \overline{B_1 B_2} = R; \quad \overline{A_1 B_2} = -\overline{A_2 B_1} = S; \quad \overline{A_1 B_1} = \overline{A_2 B_2} = 0,$$

где

$$R = R_c + R_n; \quad S = S_c + S_n.$$

Четырехмерный закон распределения проекций суммарных векторов сигнал + помеха на оси координат запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} f(A_1, B_1, A_2, B_2) &= \frac{1}{4\pi^2 (\sigma_1^2 \sigma_2^2 - R^2 - S^2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2 (\sigma_1^2 \sigma_2^2 - R^2 - S^2)} \times \right. \\ &\times \left. [\sigma_2^2 A_1^2 + \sigma_2^2 B_1^2 + \sigma_1^2 A_2^2 + \sigma_1^2 B_2^2 - 2R (A_1 A_2 + B_1 B_2) - 2S (A_2 B_1 - A_1 B_2)] \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставим в соотношение (2) вместо проекций суммарных векторов их значения из (1) и произведем нормировку. После несложных преобразований получим трехмерный закон распределения амплитуд и разности фаз сигналов и помех в двухканальной фазоизмерительной системе:

$$\begin{aligned} f(E_{N1}, E_{N2}, \psi_p) &= \frac{E_{N1} E_{N2}}{2\pi (1 - r^2 - s^2)} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2 (1 - r^2 - s^2)} [E_{N1}^2 + E_{N2}^2 - 2E_{N1} E_{N2} (r \cos \psi_p - s \sin \psi_p)] \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Выполнив интегрирование выражения (3) по нормированным амплитудам в пределах их изменения $(0 \div \infty)$, получаем одномерный дифференциальный закон распределения разности фаз шумоподобных сигналов и помех:

$$f(\psi_p) = \frac{1 - r^2 - s^2}{2\pi} \left[\frac{1}{1 - x^2} + x \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} \right], \quad (4)$$

где

$$x = r \cos \psi_p + s \sin \psi_p.$$

Учитывая аналитические выражения для r и s , обозначим

$$r^2 + s^2 = \left[\frac{\sigma_{n1} \sigma_{n2} r_n + \sigma_{c1} \sigma_{c2} r_c}{\sqrt{(\sigma_{c1}^2 + \sigma_{n1}^2)(\sigma_{c2}^2 + \sigma_{n2}^2)}} \right]^2 + \left[\frac{\sigma_{n1} \sigma_{n2} s_n + \sigma_{c1} \sigma_{c2} s_c}{\sqrt{(\sigma_{c1}^2 + \sigma_{n1}^2)(\sigma_{c2}^2 + \sigma_{n2}^2)}} \right]^2 = a^2.$$

Введем отношения сигнал/помеха по мощности

$$q_1 = \frac{\sigma_{c1}^2}{\sigma_{n1}^2}; \quad q_2 = \frac{\sigma_{c2}^2}{\sigma_{n2}^2}; \quad q_{\text{эkv}} = \sqrt{q_1 q_2}.$$

Параметр a теперь можно записать в виде

$$a^2 = \frac{p_n^2 + 2q_{\text{эkv}} p_n p_c \cos(\gamma_c - \gamma_n) + q_{\text{эkv}}^2 p_c^2}{(1 + q_{\text{эkv}})^2}.$$

Используя формулы для суммы тригонометрических величин, получаем

$$x = r \cos \psi_p + s \sin \psi_p = \sqrt{r^2 + s^2} \cos(\psi_p - \delta) = a \cos(\psi_p - \delta),$$

где δ определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{s}{r} = \frac{\sigma_{c1} \sigma_{c2} s_c + \sigma_{n1} \sigma_{n2} s_n}{\sigma_{c1} \sigma_{c2} r_c + \sigma_{n1} \sigma_{n2} r_n} = \frac{p_n \sin \gamma_n + q_{\text{эkv}} p_c \sin \gamma_c}{p_n \cos \gamma_n + q_{\text{эkv}} p_c \cos \gamma_c}.$$

Функцию распределения разности фаз сигналов и помех можно выразить через параметры a и δ :

$$f(\psi_p) = \frac{1 - a^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{1 - a^2 \cos^2(\psi_p - \delta)} + \frac{a \cos(\psi_p - \delta) \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin(a \cos(\psi_p - \delta)) \right]}{\sqrt{[1 - a^2 \cos^2(\psi_p - \delta)]^3}} \right\}. \quad (5)$$

Сравнивая соотношение (5) с известной формулой для двумерной плотности вероятности фазы узкополосного случайного процесса [5], можно заметить их полное формальное сходство. Параметр a можно назвать обобщенным коэффициентом взаимной корреляции суммарного процесса сигнал + помеха, а параметр δ — модой распределения разности фаз сигналов и помех.

появляется краевой максимум в точке $f(\pi)$ или $f(-\pi)$ соответственно. Неидентичность отношений сигнал/помеха в каналах системы не изменяет закона распределения разности фаз при $q_s = \text{const}$.

Соотношение для плотности вероятности разности фаз сигналов и помех справедливо при любых значениях исходных параметров. Так, при $q_s = 0$ получаем закон распределения разности фаз коррелированных помех без сигнала. Если при этом и $p_n = 0$, для разности фаз некоррелированных помех получаем равномерный закон распределения

$$f(\psi_p) = \frac{1}{2\pi}.$$

Если $q_s = \infty$, то $a = p_c$, $\delta = \gamma_c$ и соотношение (5) дает плотность вероятности разности фаз сигналов без помех, которая при $p_c = 1$ (когерентные сигналы) вырождается в дельта-функцию.

Отметим, что возможно такое сочетание параметров сигналов и помех, когда $a=0$:

$$p_n + q_s^2 p_c^2 = -2q_s p_n p_c \cos(\gamma_n - \gamma_c).$$

В этом случае закон распределения разности фаз становится равномерным, т. е. таким, как и для некоррелированных помех, несмотря на наличие сигнала и коррелированных помех.

Соотношение для плотности вероятности разности фаз сигналов и помех (5), полученное в предположении, что сигнал представляет собой узкополосный нормальный шум, справедливо и для «дружно» флюктуирующих по амплитуде сигналов и помех, функция распределения разности фаз которых получена в [4] при $p_c = 1$, $S_n = 0$ ($\gamma_n = 0$):

$$f(\psi_p) = \frac{1 - p^2 + 2q(1 - p \cos \gamma_c)}{2\pi(1 - q)^2} \frac{1 - \beta \operatorname{ctg} \beta}{\sin^2 \beta}, \quad (6)$$

где p — коэффициент взаимной корреляции помех;
 $q(\gamma)$ — отношение сигнал/помеха по мощности;
 $\gamma(\xi)$ — разность фаз сигналов;
 $\psi_p(\varphi)$ — мгновенная разность фаз сигналов и помех;

$$\beta = \arccos \left[-\frac{p \cos \psi_p + q \cos(\psi_0 - \gamma)}{1 + q} \right].$$

В скобках указаны обозначения величин, согласно работе [4]. Параметры a и δ в соотношении (5) для случая, рассмотренного в работе [4], равны:

$$a^2 = \frac{p^2 + 2q p \cos \gamma + q^2}{(1 + q)^2}; \quad \delta = \operatorname{arctg} \frac{q \sin \gamma}{p + q \cos \gamma}.$$

Нетрудно показать, что при этих условиях соотношения (5) и (6) тождественно равны. Следовательно, функция распределения разности фаз сигналов и помех, приведенная в [4], является частным случаем более общего соотношения, полученного в настоящей работе.

В. В. Цветновым в [1—3] определены законы распределения разности фаз гармонических сигналов и помех. Эти законы выражаются через специальные, введенные автором, L -функции и их производные или ряды. Теоретически сравнивать соотношения, полученные В. В. Цветновым, с выражением (5) настоящей работы затруднительно. На рис. 2 приведены кривые плотности вероятности, построенные по соотношению (5); крестиками обозначены точки, вычисленные по формуле (31) в статье [1]. Из рис. 2 видно, что соотношение (5) и формула (31) работы [1] различаются незначительно. Можно сделать вывод, что закон

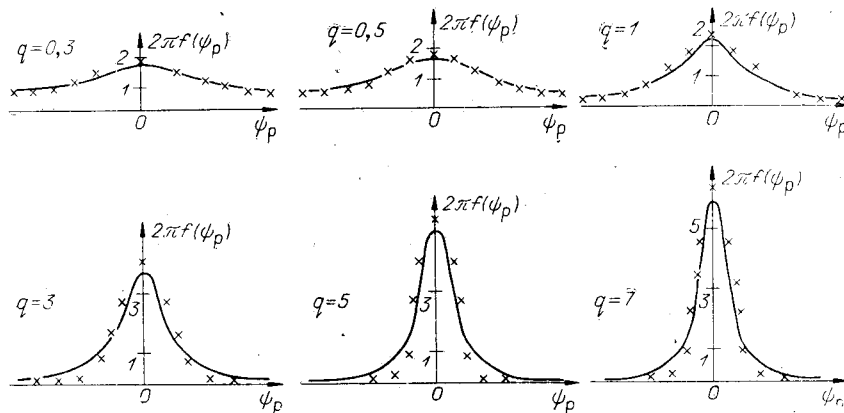


Рис. 2.

распределения (5), полученный в предположении, что сигнал представляет собой узкополосный шум, точно описывает также распределение разности фаз флюктуирующих по амплитуде сигналов и помех и с достаточной для практики точностью распределение разности фаз гармонических сигналов и помех.

СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ И СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ РАЗНОСТИ ФАЗ

Процесс на выходе фазометра при воздействии на его вход сигналов и помех можно представить в виде

$$\psi_p = \varphi_0 + \Delta\varphi(t),$$

где φ_0 — разность фаз сигналов без помех;
 $\Delta\varphi(t)$ — систематическая и случайная погрешности, обусловленные воздействием помех.

Для определения величины систематической погрешности вычислим среднее значение (математическое ожидание) разности фаз сигналов и помех. Закон распределения разности фаз известен (5), следовательно,

$$m_{\psi_p} = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_p f(\psi_p) d\psi_p.$$

Выполнив интегрирование, получаем

$$m_{\psi_p} = \frac{a \sin \delta}{\sqrt{1 - a^2 \cos^2 \delta}} \arccos (a \cos \delta). \quad (7)$$

Соотношение (7) позволяет определить величину систематической погрешности как разность $\Delta \varphi_0 = \gamma_c - m_{\psi_p}$. Располагая сведениями о сигналах и помехах, можно вычислить поправку и исключить систематическую погрешность.

Существуют две причины возникновения систематической погрешности. Первая заключается в том, что вследствие многозначности отсчетов фазового измерителя при измерении отличных от нуля сдвигов фаз сигналов кривая распределения разности фаз сигналов и помех становится асимметричной и среднее значение разности фаз на выходе фазометра смещается в сторону нулевого значения. Это хорошо видно на рис. 3, а, где приведена зависимость среднего значения разности фаз от параметра δ при различных значениях параметра a . При измерении больших сдвигов фаз сигналов систематическая погрешность может достигать значительной величины.

Вторая причина заключается в том, что при коррелированных помехах среднее значение разности фаз сигналов и помех в общем случае не равно сдвигу фаз сигналов. На этот источник систематической погрешности указывалось в [4].

Величину случайной погрешности измерения разности фаз сигналов при наличии помех можно характеризовать дисперсией разности фаз, которая вычисляется следующим образом:

$$D_{\psi_p} = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_p^2 f(\psi_p) d\psi_p - \left[\int_{-\pi}^{\pi} \psi_p f(\psi_p) d\psi_p \right]^2,$$

где $f(\psi_p)$ определена соотношением (5). Выполнив интегрирование, получаем

$$D_{\psi_p} = \frac{1 - a^2}{1 - a^2 \cos^2 \delta} \arccos^2 (a \cos \delta) + \ln a \ln (1 - a^2) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - a^2)^n}{n^2}. \quad (8)$$

На рис. 3, б представлена зависимость среднеквадратического значения погрешности $\sigma_{\psi_p} = \sqrt{D_{\psi_p}}$ от параметра a при $\delta=0$.

Для определения доверительной вероятности или доверительного

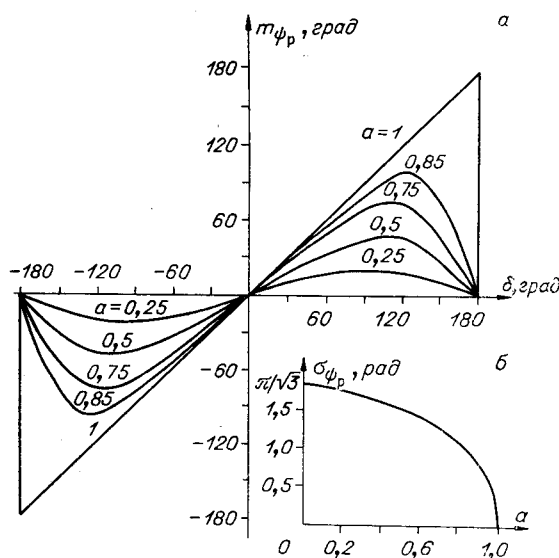


Рис. 3.

интервала результата измерения вычислим вероятность нахождения случайной величины ψ_p на участке $\theta_1 \div \theta_2$:

$$F(\theta_1 < \psi_p < \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\psi_p) d\psi_p = \frac{1}{2} \left\{ \theta_2 - \theta_1 + \frac{a \sin(\theta_2 - \delta)}{\sqrt{1 - a^2 \cos^2(\theta_2 - \delta)}} \times \right. \\ \times \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin a \cos(\theta_2 - \delta) \right] - \frac{a \sin(\theta_1 - \delta)}{\sqrt{1 - a^2 \cos^2(\theta_1 - \delta)}} \times \\ \left. \times \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin a \cos(\theta_1 - \delta) \right] \right\}. \quad (9)$$

При $\theta_1 = -\pi$ соотношение (9) переходит в интегральный закон распределения разности фаз сигналов и помех.

Соотношения (7) — (9) позволяют определить погрешности фазоизмерительных систем, не осредняющих результата измерения (безынерционные системы). При большом времени осреднения, когда флуктуации разности фаз практически отсутствуют, случайная погрешность равняется нулю, а систематическая определяется соотношением (7). Для определения случайной погрешности фазоизмерительной системы при малых и средних временах осреднения необходимо знать корреляционную функцию разности фаз сигналов и помех.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании материала, приведенного в настоящей работе, можно сделать следующие выводы. Воздействие помех на входы фазоизмерительной системы приводит к появлению не только случайной, но и систематической погрешности измерения разности фаз сигналов. Величины погрешностей определяются тремя исходными параметрами — отношением сигнал/помеха и коэффициентами взаимной корреляции сигналов и помех.

Величины погрешностей практически не зависят от флуктуаций амплитуд и фаз сигналов при сохранении их когерентности в каналах системы. Нарушение когерентности сигналов приводит к резкому возрастанию случайной и при несимметричной кривой распределения также систематической погрешности.

Соотношения, которые приводятся в статье, позволяют определить погрешности, обусловленные воздействием помех, в различных условиях работы фазоизмерительных систем, а также разработать пути снижения погрешностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Цветнов. Статистические свойства сигналов и помех в двухканальных фазовых системах.— Радиотехника, 1957, т. 12, № 5.
2. В. В. Цветнов. Воздействие гауссовых помех на двухканальные фазовые системы.— В сб. «Исследование точности и помехоустойчивости фазовых радиопеленгаторов». Л., Судпромгиз, 1959.
3. В. В. Цветнов. О распределении разности фаз гармонических сигналов и некоррелированных гауссовых помех в двухканальной системе с идентичными каналами.— Радиотехника, 1964, т. 19, № 10.
4. М. С. Александров. Распределение разности фаз колебаний совокупности флуктуирующего сигнала, шумов и коррелированной шумовой помехи.— Радиотехника и электроника, 1960, № 3.
5. В. И. Бунимович. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. М., «Советское радио», 1951.

Поступила в редакцию
28 апреля 1967 г.