АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1968

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 681.2.08

З. А. ЛИВШИЦ
(Новосибирск)

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ СРАВНЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

В настоящей заметке продолжается изучение взаимоотношений между различными критериями сравнения измерительных средств, начатое в работе*, определениями и обозначениями которой мы будем в дальнейшем пользоваться.

В работе* показано, что необходимым условием эквивалентности критериев над Н (а следовательно, и над О) является следующая взаимосвязь между функциями штрафов, на которых эти критерии основаны:

$$\varphi_2(x, z) = c(x)\varphi_1(x, z), \tag{1}$$

где $c(x) \geqslant 0$.

Здесь будет доказано более сильное утверждение. Именно, для эквивалентности критериев G_1 и G_2 над О необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi_2(x, z) = c\varphi_1(x, z), \tag{2}$$

где c — произвольное положительное число. Докажем необходимость сформулированного условия.

Предположим противное, т. е. пусть существуют два эквивалентных критерия G_1 и G_2 и для двух значений измеряемой величины x_1 и x_2

$$\varphi_2(x_1, z) = \alpha_1\varphi_1(x_1, z),$$

$$\varphi_2(x_2, z) = \alpha_2\varphi_1(x_2, z);$$

причем $\alpha_1 > \alpha_2$.

Укажем пару приборов таких, что один из них лучше другого по первому критерию и хуже в смысле критерия G_2. Пусть

$$\varphi_1(x_1, z_1) = A; \quad \varphi_1(x_1, z_2) = C; \quad \varphi_1(x_2, z_3) = B; \quad \varphi_1(x_2, z_4) = D,$$

причем $A > C$, $D > B$. Такие пары точек (x, z) всегда можно найти ввиду условия $\varphi(x_0, z) \not\equiv \text{const}$. Тогда зададим следующее «поведение» приборов Π_1 и Π_2: если значение измеряемой величины равно x_1, то первый из них показывает z_1, а второй — z_2; если же на входе величина x_2, то показания приборов — z_3 и z_4 соответственно. Сравним Π_1 и Π_2 на таком распределении F измеряемой величины: $P(x_1) = p$; $P(x_2) = 1 - p$. Вычислим средние значения функций штрафов, соответствующих критериям G_1 и G_2 для обоих приборов. Получаем:

$$M_1\varphi_1(x, z) = pA + (1 - p)B;$$

$$M_2\varphi_1(x, z) = pC + (1 - p)D;$$

---

* З. А. Лившиц. О критериях сравнения средств измерения.— Автометрия, 1967, № 6.

$$M_1\varphi_2(x,\ z)=\alpha_1 pA+\alpha_2(1-p)B;$$

$$M_2\varphi_2(x,\ z)=\alpha_1 pC+\alpha_2(1-p)D. \qquad (3)$$

Легко убедиться, что если в качестве p выбрать любое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{D-B}{(A-C)+(D-B)}<p<\frac{\alpha_2(D-B)}{\alpha_1(A-C)+\alpha_2(D-B)}, \qquad (4)$$

то

$$\Pi_1 \overset{G_1}{\underset{F}{\geqslant}} \Pi_2 \quad \text{и} \quad \Pi_2 \overset{G_2}{\underset{F}{\geqslant}} \Pi_1,$$

а это противоречит предположению об эквивалентности G_1 и G_2. Необходимость сформулированного условия доказана полностью, а достаточность совершенно очевидна.

В качестве иллюстрации изложенного результата заметим, что из него, в частности, следует, что критерии средней абсолютной и средней относительной погрешности не эквивалентны, в то время как над классом Н такая эквивалентность имеет место.

* * *

Критерий максимума количества информации не входит во множество рассмотренных выше критериев. Интересно, однако, изучить вопрос о взаимоотношениях между информационным и метрологическими критериями, т. е. выяснить, в частности, влияние метрологических свойств прибора на количество приносимой им информации. В данной работе будет показано, что сравнение приборов по информационному критерию не может быть сведено к сравнению их точностных характеристик; говоря точнее, доказывается, что ни один из упомянутых критериев не эквивалентен информационному.

В самом деле, пусть имеется некоторый критерий G, основанный на функции штрафов $\varphi(x,\ z)$, причем $\varphi(x_1,\ z_1)=X$; $\varphi(x_2,\ z_1)=Y$; $\varphi(x_2,\ z_2)=Z$; $Y<Z$.

Рассмотрим прибор Π_1, который показывает z_1 независимо от того, какое значение (x_1 или x_2) принимает измеряемая величина. Реакция прибора Π_2 на входной сигнал x_1 есть z_1, а на $x_2 - z_2$. Сравним эти приборы на следующем распределении измеряемой величины: $P(x_1)=P(x_2)=\frac{1}{2}$. Тогда

$$M_1\,\varphi(x,\ z)=\frac{1}{2}(X+Y);$$

$$M_2\,\varphi(x,\ z)=\frac{1}{2}(X+Z). \qquad (5)$$

Итак,

$$M_1\varphi(x,\ z)<M_2\varphi(x,\ z),\ \text{т. е.}$$

$$\Pi_1 \overset{G}{\geqslant} \Pi_2. \qquad (6)$$

С другой стороны, очевидно, что второй прибор на данном распределении приносит больше информации, чем первый. Действительно,

$$I_1(x,\ z)=\mathrm{H}(x)-\mathrm{H}_1(x/z)=\ln 2-\ln 2=0;$$

$$I_2(x,\ z)=\mathrm{H}(x)-\mathrm{H}_2(x/z)=\ln 2. \qquad (7)$$

Здесь $\mathrm{H}(x)$ — энтропия измеряемой величины; $I_i(x,\ z)$ — количество информации, содержащееся в показаниях i-го прибора об измеряемой величине; $\mathrm{H}_i(x/z)$ — условная энтропия.

Таким образом, критерий G не эквивалентен информационному.

В заключение хотелось бы отметить, что примеры, используемые в доказательствах, умышленно выбраны грубыми. Это объясняется, во-первых, стремлением к простоте изложения и, во-вторых, тем фактом, что автору в настоящее время не известно никаких сколь-нибудь тонких ограничений на множество приборов, при которых сформулированные выше результаты не имели бы места.

Поступила в редакцию
12 июня 1967 г.

УДК 658.652.012.7

И. А. КАРАБАНОВ
(Ленинград)

ОЦЕНКА НЕОБХОДИМОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ СТАТИСТИЧЕСКОМ РЕГУЛИРОВАНИИ

Качество серийной продукции определяется совокупностью факторов, имеющих как случайный, так и систематический характер. Наличие случайных факторов вызывает рассеивание параметров готовых изделий вокруг центра группировки и является характеристикой точности оборудования. Систематическая составляющая проявляется в смещении центра группирования продукции. Величина систематической составляющей обычно не может быть задана заранее, но ее можно оценить на основании статистической обработки результатов измерений параметров уже выпущенных изделий. Такую оценку можно использовать для автоматической коррекции технологического процесса с целью поддержания центра группирования продукции на номинальном значении.

Точность работы автоматического регулирующего комплекса, использующего метод математической статистики, зависит от точности воспроизведения функции распределения регулируемой величины, определяемой объемом выборки, точностью измерительного устройства и точностью статистического анализатора, обрабатывающего результаты измерения. Ниже рассматривается введение автоматической коррекции положения центра распределения нормальной генеральной совокупности, дисперсию которой σ_1^2 считаем постоянной и известной, при этом полагаем также, что измерительное устройство и статистический анализатор не имеют погрешности. В качестве приближенной оценки центра группирования используется среднее арифметическое x, вычисляемое по данным выборки. Для определения объема выборки необходимо предварительно изучить характер изменения внешних факторов, имеющих систематический характер, и установить закон распределения отклонения центра распределения продукции от номинального значения под действием этих факторов. Пусть это отклонение γ изменяется с плотностью вероятности $f(\gamma)$.

При изготовлении конкретной k-й партии изделий объемом N будет иметь место начальное смещение γ_k центра распределения от номинального значения, являющееся конкретной реализацией случайной величины γ. При этом доля брака будет определяться величиной

$$B_1(\gamma_k) = 1 - \int\limits_{-x_д}^{x_д} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\gamma_k)^2}{2\sigma_1^2}} dx, \qquad (1)$$

где $x_д$ определяет зону допуска.

После набора выборки n определяется смещение γ_k и проводится первая коррекция. Остаточное смещение после однократной коррекции будет определяться конкретной реализацией случайной величины $\bar{x}$, при которой величина брака описывается формулой

$$B_2(\bar{x}) = 1 - \int\limits_{-x_д}^{x_д} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_1^2}} dx. \qquad (2)$$