А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 6 1967

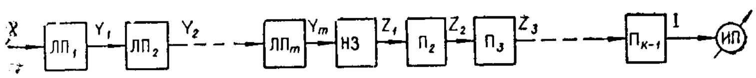
ЭЛЕКТРОИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

УДК 621.317.7.088

Л. И. ВОЛГИН
(Таллин)

О СУММАРНОЙ ПОГРЕШНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ

Наиболее распространенной группой измерительных устройств являются приборы непосредственной оценки с разомкнутыми измерительными цепями. В общем виде прибор с разомкнутой измерительной цепью можно представить последовательным включением ряда преобразователей (см. рисунок). При проектировании и эксплуатации измерительного прибора основным вопросом является правильное определение суммарной погрешности измерения, если известны частные погрешности промежуточных преобразователей. При этом обычно интересует величина суммарной погрешности в каждой точке x шкалы измерительного прибора (закон распределения суммарной погрешности вдоль шкалы прибора).



В настоящей работе рассматривается указанная группа измерительных приборов с индикатором магнитоэлектрической системы при наличии промежуточного нелинейного преобразования. Рассмотрение проводится для стационарного режима работы измерительной цепи.

Связь между измеряемой величиной X и углом отклонения α стрелки определяется уравнением шкалы

$$\alpha = \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_к \varphi(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m X), \tag{1}$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ — коэффициенты передачи (чувствительность) линейных преобразователей ЛП, включенных перед нелинейным звеном; $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{к-1}$ — коэффициенты передачи линейных преобразователей, включенных после НЗ; γ_1 — числовой коэффициент в передаточной функции $Z_1 = \gamma_1 \varphi(Y_m)$ нелинейного звена НЗ; $\gamma_к$ — числовой коэффициент (чувствительность) в передаточной функции $\alpha = \gamma_к I$ индикаторного прибора ИП.

Вследствие старения схемных элементов, их нестабильности, влияния внешних факторов (температуры, влажности и пр.) коэффициенты β_i, γ_i и функция φ отличаются от их градуировочных значений β_{io}, γ_{io}

и φ_0. Связь между β_i, γ_i и β_{io}, γ_{io} выражается соотношениями:

$$\beta_i = \beta_{io} + \Delta\beta_i = \beta_{io}(1 + \delta_{\beta i}); \qquad \gamma_i = \gamma_{io} + \Delta\gamma_i = \gamma_{io}(1 + \delta_{\gamma i}),$$

где $\delta_{\beta i}$, $\delta_{\gamma i}$ — относительные, а $\Delta\beta_i$, $\Delta\gamma_i$ — абсолютные изменения коэффициентов β_i и γ_i (частные погрешности).

При градуировке прибора выражение (1) подвергается обратному функциональному преобразованию. Связь между измеряемой величиной X и отсчетом x выражается уравнением градуировки

$$x = \frac{1}{\beta_{10}\,\beta_{20}\ldots\beta_{mo}}\,\bar{\varphi}_0\left[\frac{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_\kappa\varphi(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m X)}{\gamma_{10}\,\gamma_{20}\ldots\gamma_{\kappa o}}\right], \tag{2}$$

где φ_0, $\bar{\varphi}_0$ — функции взаимно обратные.

Считаем, что погрешность градуировки шкалы отсутствует. Вопросу градуировочной погрешности при линейной аппроксимации шкалы посвящена работа [1]. В идеальном случае (при абсолютной стабильности, при отсутствии влияния внешних факторов и пр.) $\varphi = \varphi_0$, $\delta_{\beta i} = \delta_{\gamma i} = 0$. Тогда, согласно (2), $x = X$, так как справедливо тождество $\bar{\varphi}[\varphi(X)] = X$, т. е. рассматриваемый случай соответствует прямой градуировке шкалы прибора [2]. Для относительной суммарной погрешности измерения, трансформированной на вход прибора, можем записать следующее соотношение:

$$\delta = \frac{x}{X} - 1 = \frac{1}{X\prod\limits_{i=1}^{m}\beta_{io}}\,\bar{\varphi}_0\left\langle \varphi\left[X\prod_{i=1}^{m}\beta_{io}(1+\delta_{\beta i})\right]\prod_{i=1}^{k}(1+\delta_{\gamma i})\right\rangle - 1. \tag{3}$$

При малых величинах частных погрешностей ($\delta_{\beta i} \ll 1$; $\delta_{\gamma i} \ll 1$), пренебрегая слагаемыми второго и более высших порядков малости, запишем

$$\delta = \frac{1}{X\beta_0}\,\bar{\varphi}_0\left\langle \varphi[X(1+\delta_\beta)\beta_0]\,(1+\delta_\gamma)\right\rangle - 1, \tag{4}$$

где

$$\beta_0 = \prod_{i=1}^{m}\beta_{io}; \quad \delta_\beta = \sum_{i=1}^{m}\delta_{\beta i}; \quad \delta_\gamma = \sum_{i=1}^{k}\delta_{\gamma i}.$$

Рассмотрим суммарную погрешность измерительных приборов, имеющих собственную образцовую меру (измерительные приборы с калибровкой). Операция калибровки заключается в подаче на вход прибора образцовой величины $X_1 = X_0(1 + \delta_0)$ и изменении одного из коэффициентов β_j или γ_j до совмещения стрелки индикатора с точкой шкалы x_0. Здесь δ_0 является относительной погрешностью образцовой меры, обусловленной неточностью аттестации и ее нестабильностью. Вследствие погрешности вариации, паралакса и пр. совмещение стрелки с точкой шкалы x_0 производится с некоторой ошибкой, т. е. установка стрелки будет произведена в точке $x_1 = x_0(1 + \delta_x)$. Предполагается, что прибор обладает кратковременной стабильностью, т. е. после калибровки за время измерения параметры его не изменяются. В противном случае операция калибровки теряет смысл. Здесь следует различать два случая: операция калибровки производится путем изменения коэффициента β_j одного из промежуточных преобразователей, включенного до НЗ; операция калибровки производится изменением коэффициента γ_j промежуточного преобразователя, включенного после НЗ. Подставив значения x_1 и X_1 в (2), соответственно найдем значения регулируемых коэффициентов β_j и γ_j. Подставив найденную величину β_j в (4), получим для первого случая

$$\delta = \frac{1}{X\beta_0}\bar{\varphi}_0 \left\langle (1+\delta_\gamma)\varphi\left[\frac{x}{x_0(1+\delta_0)}\bar{\varphi}\left\{\frac{\varphi_0[x_0(1+\delta_x)\beta_0]}{1+\delta_\gamma}\right\}\right]\right\rangle - 1. \quad (5)$$

Подставив значение γ_j в (4) для второго случая получим
сит от частных погрешностей промежуточных преобразователей, включенных до НЗ, когда при калибровке в качестве изменяемого параметра используется один из коэффициентов $\beta_j = \mathrm{var}$. Из соотношения (6) видим, что при $\gamma_j = \mathrm{var}$ суммарная погрешность не зависит от частных погрешностей промежуточных преобразователей, включенных после НЗ. Согласно (5) и (6), при $X = X_0$ (калибровочная точка шкалы) суммарная погрешность не зависит от величин $\delta_{\beta i}$ и $\delta_{\gamma i}$, а определяется только значениями δ_x и δ_0; при этом $\delta = \delta_x - \delta_0$.

Выражения (3)—(6) в неявном виде представляют собой закон распределения суммарной погрешности вдоль шкалы измерительного прибора. Для определения закона распределения в явном виде необходимо частные относительные погрешности, значения которых зависят от измеряемой величины, выразить через X. В нашем случае относительная погрешность индикатора ИП зависит от измеряемой величины, т. е. $\delta_{\gamma k} = \delta_{\gamma k}(X)$. Действительно, $\alpha = \gamma_k I = \gamma_{k0} I + (\Delta\alpha)_k$, где $(\Delta\alpha)_k$ есть абсолютная погрешность ИП. Для относительной погрешности $\delta_{\gamma k}$ можем записать следующее очевидное соотношение:

$$\delta_{\gamma k} = \frac{(\Delta\alpha)_k}{\alpha} = \delta_{k\text{н}}\frac{\alpha_\text{н}}{\alpha}, \quad (7)$$

где $\delta_{k\text{н}} = \delta_{\gamma k}(X_\text{н})$ – относительная погрешность ИП в точке $X_\text{н}$, соответствующая углу отклонения стрелки $\alpha_\text{н}$ (приведенная погрешность ИП).

С учетом равенства (1) формулу (7) можно представить в виде

$$\delta_{\gamma k} = \delta_{k\text{н}}\frac{\varphi_0(X_\text{н}\beta_0)}{\varphi_0(X\beta_0)}. \quad (8)$$

Более детальное рассмотрение влияния $\Delta\alpha$ на погрешность измерения приборов с функциональными шкалами проведено в [3]. Так как абсолютную погрешность $(\Delta\alpha)_x$ $\left(\delta_x = \frac{(\Delta\alpha)_x}{\alpha_0}\right)$ в любой точке шкалы x_0 можно считать постоянной, то для погрешности установки δ_x аналогичным образом можем записать

$$\delta_x = \delta_{x\text{н}}\frac{\varphi_0(X_\text{н}\beta_0)}{\varphi_0(X_0\beta_0)}, \quad (6)$$

где

$$\delta_{x\text{н}} = \delta_x(X_\text{н}).$$

Закон распределения суммарной погрешности вдоль шкалы прибора получим при подстановке в формулы (3)—(6) соотношений (8) и (9). Рассмотрим некоторые частные случаи выведенных выше соотношений.

В таблице приведены суммарные погрешности для четырех наиболее распространенных видов функционального преобразования. Формулы выведены из предположения, что $\varphi = \varphi_0$ и $\delta_{\beta i}, \delta_{\gamma i}, \delta_0, \delta_x \ll 1$. Для получения закона распределения суммарной погрешности необходимо дополнительно учесть соотношения (8) и (9).

$\varphi(Y)$	Суммарная погрешность δ	Суммарная погрешность δ при	
		$\gamma_j = \mathrm{var}$	$\beta_j = \mathrm{var}$
Y^n	$\delta_\beta + \frac{1}{n}\delta_\gamma$	$\delta_x - \delta_0$	$\delta_x - \delta_0$
$\frac{1}{a+bY^n}$	$\delta_\beta - \frac{1}{n}\delta_\gamma\left(1 + \frac{1}{bX^n\beta_0^n}\right)$	$\left(1+\frac{a}{bX^n\beta_0^n}\right)\left[\frac{X_0^n\beta_0^n(\delta_x-\delta_0)}{\frac{a}{b}+X_0^n\beta_0^n} + \frac{X^n\beta_0^n\delta_\beta}{\frac{a}{b}+X^n\beta_0^n} - \frac{x_0^n\beta_0^n\delta_\beta}{\frac{a}{b}+X_0^n\beta_0^n}\right]$	$\delta_x - \delta_0 + \frac{a\delta_\gamma}{nb\beta_0^n}\left(\frac{1}{X_0^n} - \frac{1}{X^n}\right)$
$\ln Y^n$	$\delta_\beta + \delta_\gamma \ln X\beta_0$	$\delta_x - \delta_0 + \left(1 - \frac{\ln X\beta_0}{\ln X_0\beta_0}\right)\delta_\beta$	$\delta_x - \delta_0 + \delta_\gamma \ln\frac{X}{X_0}$
e^{Y^n}	$\delta_\beta + \frac{\delta_\gamma}{nX^n\beta_0^n}$	$(\delta_x - \delta_0 - \delta_\beta)\frac{X_0^n}{X^n} + \delta_\beta$	$\delta_x - \delta_0 + \frac{\delta_\gamma}{n\beta_0^n}\left(\frac{1}{X^n} - \frac{1}{X_0^n}\right)$

Общепринятой характеристикой прибора является его класс точности, поэтому целесообразно выразить закон распределения суммарной погрешности через величину класса точности. В этом случае получим аналитическое соотношение для вычисления допустимых относительных погрешностей измерения вдоль шкалы прибора. Рассмотрим случай, когда класс точности определяется суммарной погрешностью в точке $X = X_н$ (например, электронные вольтметры). Формулу для вычисления допустимых погрешностей измерения получим следующим образом. В выражении для закона распределения суммарной погрешности члены, не зависящие от измеряемой величины, обозначим $M(\delta_i)$. Тогда суммарную погрешность можно представить двумя слагаемыми

$$\delta = M(\delta_i) + N[\delta_i(X)], \tag{10}$$

где $N[\delta_i(X)]$ — члены, зависящие от X.

Для рассматриваемого примера класс точности

$$\delta_н = M(\delta_i) + N[\delta_i(X_н)]. \tag{11}$$

Решив (11) относительно $M(\delta_i)$ и подставив найденное значение в (10), получим искомую зависимость

$$\delta = \delta_н + N[\delta(X)] - N[\delta(X_н)]. \tag{12}$$

Например, для параболического преобразования $\varphi = Y^n$, согласно (4), соотношение (12) будет иметь вид

$$\delta = \delta_н + \frac{1}{n}\delta_{kн}\left(\frac{X_н^n}{X^n} - 1\right), \tag{13}$$

где

$$\delta_{н} = \delta_{\beta} + \frac{1}{n}\left(\delta_{\gamma} - \delta_{\gamma k} + \delta_{kн}\right).$$

В частном случае при $n=1$ выражение (13) дает суммарную погрешность для приборов с линейной шкалой.

Представляет практический интерес рассмотреть вопрос о допустимых нормах нестабильности образцовой меры приборов с калибровкой. Исходя из условия, что нестабильность образцовой меры не должна превышать допустимой погрешности измерения в точке X_0, обусловленной погрешностью индикатора, согласно [3], можем записать

$$\delta_0 < \frac{\alpha_{н} X_{н} \varphi'(X_{н}) \overline{\varphi}'(\alpha_{н})}{X_0 \varphi'(X) \overline{\varphi}(\alpha_{н})}, \qquad (14)$$

где $\varphi'(X_{н})$, $\varphi'(X_0)$ — производные от функции $\varphi(X)$ в точках $X_{н}$ и X_0 соответственно.

Для параболической функции преобразования неравенство (14) имеет вид

$$\delta_0 < \frac{1}{n}\,\delta_{kн}\left(\frac{X_{н}}{X}\right)^{n}. \qquad (15)$$

Формула (14) позволяет при проектировании прибора, исходя из заданных номинального значения меры и погрешности используемого индикатора, выбрать допустимую нестабильность образцовой меры.

В проведенном анализе предполагалось, что частные погрешности являются детерминированными функциями времени и внешних факторов. В общем случае частные погрешности являются случайными величинами с известными или неизвестными законами распределения. При известных законах распределения задача сводится к функциональному преобразованию случайных величин при законе преобразования, заданном выражениями (3), (4), (5) или (6). Эти же формулы необходимы для вероятностной оценки точности при известных значениях математических ожиданий, дисперсий и корреляционных связях частных погрешностей [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Б. Карандеев, Ф. Б. Гриневич. О погрешности аппроксимации неравномерных шкал.— Измерительная техника, 1965, № 9.
2. А. Я. Шрамков. О погрешностях электроизмерительных приборов с нелинейными шкалами.— Труды конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1961.
3. Л. И. Волгин. К вопросу определения погрешности измерения приборов непосредственной оценки с функциональными шкалами.— Автоматический контроль и методы электрических измерений (Труды VI конференции), т. I. Новосибирск, РИО СО АН СССР, 1966.
4. Б. Е. Рабинович. Методика суммирования частных погрешностей в области радиотехнических измерений.— Исследования по методике оценки погрешностей измерений. Труды Ин-тов Комитета (ВНИИМ), вып. 57 (117). М.—Л., Стандартгиз, 1962.

Поступила в редакцию
6 апреля 1966 г.,
окончательный вариант —
11 марта 1967 г.