АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 6 1967

УДК 621.317.70.004.5

А. С. ЗАГОРУЙКО, Б. В. КАРПЮК
(*Новосибирск*)

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРИОДА КОНТРОЛЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Одной из актуальных задач автометрии является обеспечение высокой надежности измерений, выполняемых автоматическими измерительными приборами и системами. Для решения этой задачи необходимо, в частности, обеспечить постоянную готовность измерительных средств к выполнению измерений с требуемой достоверностью. С этой целью находящаяся в эксплуатации измерительная аппаратура подвергается периодической поверке и контролю ее работоспособности.

Период контроля, т. е. промежутки времени, через которые необходимо осуществлять контроль работоспособности, непосредственно зависит от фактической надежности измерительных систем, условий их эксплуатации и других факторов (например, ценности измерительной информации). Кроме того, на выбор периода контроля существенное влияние должны оказывать и экономические соображения. Действительно, несмотря на то, что измерительные системы не предназначены непосредственно для создания материальных ценностей, правильное функционирование этих систем во многом определяет качество продукции, эффективность работы различных производственных агрегатов, успех научных исследований и экспериментов (часто дорогостоящих). Поэтому простои измерительных систем наносят определенный экономический ущерб народному хозяйству. Следует отметить, что простои системы могут быть вызваны не только явными отказами, но и необходимостью контроля, так как во время контроля системы она обычно не может выполнять свои основные функции. Кроме того, проведение мероприятий по контролю работоспособности системы также связано с определенными затратами.

При эксплуатации измерительных систем необходимо учитывать также возможность появления в них скрытых отказов, что приводит к выдаче неточной или ложной информации, которая иногда наносит больший ущерб, чем просто потеря информации. Периодический контроль позволяет выявить скрытые отказы и тем самым уменьшить количество ложной информации и наносимый ею ущерб. Очевидно, что этот ущерб будет тем меньше, чем меньше период контроля. Но, с другой стороны, уменьшение периода контроля приводит к увеличению времени простоя системы и связанных с этим потерь. Таким образом, возникает задача оптимизации периода контроля измерительных систем по некоторым экономическим критериям, характеризующим эффективность использования этих систем.

Решение задачи оптимизации периода контроля и профилактики технических систем рассмотрено в ряде работ, однако в них не учитывается специфика функционирования измерительных систем и, кроме того, в качестве критерия оптимизации чаще всего используется коэффициент готовности системы, т. е. не учитываются экономические факторы.

В работах, в которых рассматриваются методы выбора и расчета сроков поверки измерительных приборов (см., например, [1—3]), эти сроки (периоды контроля) выбираются из условий обеспечения допустимой вероятности безотказной работы приборов, которая предполагается заданной. Экономические соображения учитываются в [4], где предложен простой способ выбора периода контроля из условий минимума средних издержек на поверку и брак продукции.

В настоящей статье решается задача определения оптимального периода контроля измерительных систем длительного использования, причем оптимизация производится по общему экономическому критерию, характеризующему их эффективность. Таким критерием является средний реальный доход $C_{\text{р.д}}$, получаемый от эксплуатации измерительной системы в течение произвольного времени t:

$$C_{\text{р.д}} = C'_{\text{и.д}} T_{\text{р}} - \frac{tC_0}{t_{\text{э}}} - C_{\text{э}}, \tag{1}$$

где $C'_{\text{и.д}}$ — средний идеальный доход за единицу времени;
$T_{\text{р}}$ — среднее время правильной работы системы за время t;
C_0 — стоимость системы;
$t_{\text{э}}$ — долговечность (предполагаемое максимальное время эксплуатации) системы;
$C_{\text{э}}$ — средние эксплуатационные расходы за время t, которые можно выразить в виде суммы

$$C_{\text{э}} = C_{\text{к}} + C_{\text{у.п}} + C_{\text{у.л}} + C_{\text{пр}}. \tag{2}$$

В (2) $C_{\text{к}}$ — средняя стоимость контроля системы за время t; $C_{\text{у.п}}$ — средний экономический ущерб, вызванный потерей информации из-за простоя системы за время t; $C_{\text{у.л}}$ — средний ущерб, вызванный ложной информацией; $C_{\text{пр}}$ — прочие эксплуатационные затраты (обслуживание исправной системы, устранение отказов и т. п.).

Для выбора оптимального периода контроля необходимо определить функциональные зависимости отдельных составляющих дохода $C_{\text{р.д}}$ от периода контроля $T_{\text{к}}$, причем следует учитывать, что эти зависимости могут быть различными для разных моделей процесса эксплуатации системы. Ниже приводится решение поставленной задачи для трех моделей процесса эксплуатации при следующих общих допущениях:

1) аппаратура контроля абсолютно надежна и обнаруживает отказ системы с вероятностью, равной единице;

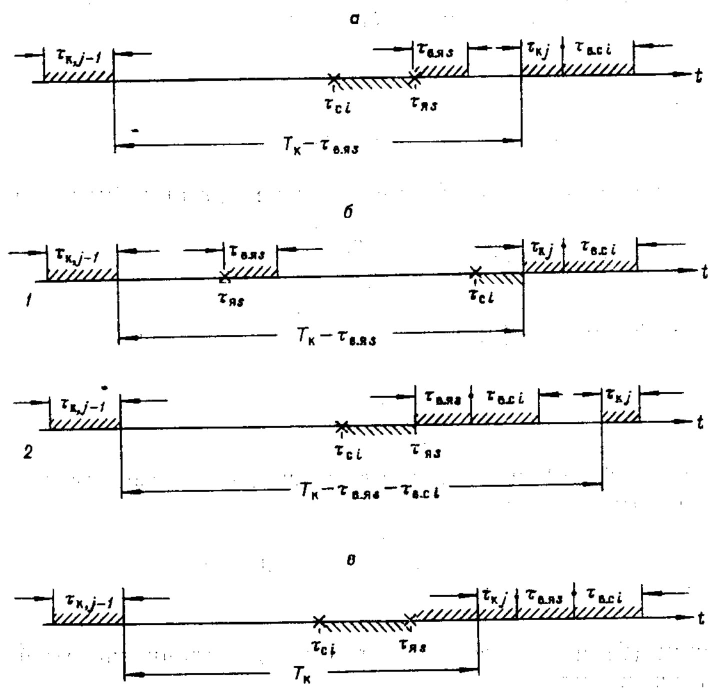
2) период контроля является величиной постоянной;

3) потоки явных и скрытых отказов системы простейшие соответственно с параметрами (интенсивностями отказов) $\lambda_{\text{я}}$ и $\lambda_{\text{с}}^{*}$;

---

* Допущение о простейшем потоке явных отказов является общепринятым, а возможность подобного допущения для потока скрытых отказов показана, например, в [3].

Первая модель процесса эксплуатации характеризуется тем, что после возникновения в системе явного отказа она сразу же начинает восстанавливаться, причем при устранении явного отказа возможный скрытый отказ не обнаруживается и не ликвидируется. Эта модель изображена на рисунке, *а*. Для этой модели среднее время $T_{л.к}$ выда-



чи системой ложной информации в течение периода контроля и среднее время $T_п$ отсутствия информации (время простоя) за время t можно определить соответственно по формулам:

$$T_{л.к} = T_к - T_{ск}; \tag{3}$$

$$T_п = m\tau_к + n_я T_{в.я} + n_с T_{в.с}, \tag{4}$$

где $T_{ск}$ — среднее время наработки до скрытого отказа в течение периода контроля;

m — среднее число контрольных проверок за время t;

$\tau_к$ — средняя продолжительность контрольной проверки;

$n_я$ и $n_с$ — средние величины чисел явных и скрытых отказов;

$T_{в.я}$ и $T_{в.с}$ — среднее время восстановления явных и скрытых отказов.

Величину $T_{ск}$ можно определить как произведение среднего времени $T_с = \frac{1}{\lambda_с}$ наработки вообще до скрытого отказа на вероятность $p\{\tau_с < T_к\}$ того, что произойдет скрытый отказ за период контроля. Учитывая третье допущение, получим

$$T_{ск} = T_с(1 - e^{-\lambda_с T_к}), \tag{5}$$

поэтому

$$T_{л.к} = T_к - T_с(1 - e^{-\lambda_с T_к}). \tag{6}$$

Так как

$$n_я = \lambda_я(t - T_п); \tag{7}$$

$$n_с = \lambda_с(t - T_п), \tag{8}$$

то из (4) следует

$$T_п = \frac{m\tau_к + (b_1 - 1)t}{b_1}, \tag{9}$$

где

$$b_1 = 1 + \lambda_я T_{в.я} + \lambda_с T_{в.с}. \tag{10}$$

Среднее число контрольных проверок за время t будет равно

$$m = \frac{t - T_п}{T_к} \tag{11}$$

или с учетом формулы (9)

$$m = \frac{t}{b_1 T_к + \tau_к}. \tag{12}$$

Из выражений (9) и (12) найдем среднее время отсутствия информации об измеряемом объекте

$$T_п = \frac{t[(b_1 - 1)T_к + \tau_к]}{b_1 T_к + \tau_к}, \tag{13}$$

а из уравнений (6) и (12) среднее время $T_л$ выдачи системой ложной информации за время t

$$T_л = mT_{л.к} = \frac{t[T_к - T_с(1 - e^{-\lambda_с T_к})]}{b_1 T_к + \tau_к}. \tag{14}$$

Среднее время $T_р$ нормальной работы системы за время t равно

$$T_р = t - T_п - T_л = \frac{t\, T_с(1 - e^{-\lambda_с T_к})}{b_1 T_к + \tau_к}. \tag{15}$$

Теперь можно найти функциональные зависимости от $T_к$ составляющих эксплуатационных затрат (2):

$$C_к = mC'_к = \frac{tC'_к}{b_1 T_к + \tau_к}; \tag{16}$$

$$C_{у.п} = C'_п T_п = \frac{tC'_п[(b_1 - 1)T_к + \tau_к]}{b_1 T_к + \tau_к}; \tag{17}$$

$$C_{у.л} - C'_л T_л = \frac{tC'_л[T_к - T_с(1 - e^{-\lambda_с T_к})]}{b_1 T_к + \tau_к}, \tag{18}$$

где $C_к'$ — средние затраты на одну контрольную проверку;

$C_п'$ — средняя стоимость ущерба из-за отсутствия измерительной информации за единицу времени;

$C_л'$ — средняя стоимость ущерба из-за выдачи системой ложной информации об измеряемом объекте за единицу времени.

Уравнение (1) для рассматриваемой модели процесса контроля будет иметь следующий вид:

$$C_{р.д\,1} = \frac{tC'_{ц.д} T_с (1 - e^{-\lambda_с T_к})}{b_1 T_к + \tau_к} - \frac{tC'_к}{b_1 T_к + \tau_к} -$$

$$- \frac{tC'_ц [(b_1 - 1) T_к + \tau_к]}{b_1 T_к + \tau_к} - \frac{tC'_л [T_к - T_с (1 - e^{-\lambda_с T_к})]}{b_1 T_к + \tau_к} - \frac{tC_0}{t_э} - C_{пр}. \tag{19}$$

Отсюда, исходя из заданной величины реального дохода, можно определить соответствующий период контрольных проверок, разрешая уравнение (19) относительно величины $T_к$.

Но так как средний реальный доход, как легко показать, имеет единственный максимум, который обеспечивается определенной величиной $T_{к.о1}$, называемой оптимальной, то представляет интерес найти ее. Для этого продифференцируем выражение (19) по $T_к$ и приравняем производную нулю. После преобразований получим следующее уравнение для определения $T_{к.о1}$:

$$[\tau_к + b_1 (T_с + T_{к.о1})] e^{-\lambda_с T_{к.о1}} = b_1 T_с + \alpha \tau_к - \beta b_1, \tag{20}$$

где α и β — коэффициенты сравнения стоимостей, соответственно равные:

$$\alpha = \frac{C'_л - C'_п}{C'_л + C'_{и.д}}, \tag{21}$$

$$\beta = \frac{C'_к}{C'_л + C'_{и.д}}. \tag{22}$$

Это уравнение легко можно решить графически, построив кривые функций

$$f(T_к) = [\tau_к + b_1 (T_с + T_к)] e^{-\lambda_с T_к}$$

и

$$\varphi(T_к) = b_1 T_с + \alpha \tau_к - \beta b_1,$$

и по точке их пересечения определить $T_{к.о1}$.

Предполагая, что $T_с \gg T_к$ и разлагая в ряд $e^{-\lambda_с T_к}$, получим квадратное уравнение для приближенного определения $T_{к.о1}$:

$$T'_к + 2 \frac{\tau_к}{b_1} T_к - 2\beta T_с - 2 \frac{T_с}{b_1} \tau_к (1 - \alpha) = 0,$$

откуда

$$T_{к.01} = -\frac{\tau_к}{b_1} + \sqrt{\frac{\tau_к^2}{b_1^2} + 2T_с\left[\beta + \frac{\tau_к}{b_1}(1-\alpha)\right]} \approx$$

$$\approx \sqrt{2T_с\left[\frac{\tau_к}{b_1}(1-\alpha) + \beta\right]}. \qquad (23)$$

Если $\alpha = \beta = 0$ [практически, если $|C'_л - C'_п| \leqslant 0{,}01\,(C'_л + C'_{и.д})$ и $C'_к \leqslant 0{,}01\,(C'_л + C'_{и.д})\,\frac{\tau_к}{b_1}$], то выбор оптимального периода контроля не будет зависеть от соотношения стоимостей:

$$[\tau_к + b_1(T_с + T'_{к.01})]\,e^{-\lambda_с T'_{к.01}} = b_1 T_с \qquad (24)$$

или приближенно

$$T'_{к.01} \approx \sqrt{\frac{2T_с\,\tau_к}{b_1}}. \qquad (25)$$

Вторая модель процесса эксплуатации (см. рисунок, *б*) отличается от первой тем, что при устранении явного отказа ликвидируется и возможный скрытый отказ. В зависимости от соотношения между величиной $T_{л.к}$, определенной по (6), и временем появления явного отказа возможны два следующих события.

1. На отрезке времени длиной $T_{л.к}$ явный отказ не произойдет. Вероятность этого события равна

$$p = P\{\tau_я > T_{л.к}\} = e^{-\lambda_я T_{л.к}}. \qquad (26)$$

2. На указанном отрезке времени произойдет явный отказ. Соответствующая вероятность равна

$$q = P\{\tau_я < T_{л.к}\} = 1 - p = 1 - e^{-\lambda_я T_{л.к}}. \qquad (27)$$

Среднее время $T'_{л.к}$ выдачи системой ложной информации в течение периода контроля в этом случае определяется как разность между средним временем $T_{я.к}$ наработки системы до явного отказа в течение периода $T_к$ и средним временем $T'_{ск}$ наработки до скрытого отказа в течение времени $T_{я.к}$:

$$T'_{л.к} = T_{я.к} - T'_{ск}. \qquad (28)$$

Величины $T_{я.к}$ и $T'_{ск}$ можно найти так же, как $T_{ск}$, в соответствии с (5):

$$T_{я.к} = T_я P\{\tau_я < T_к\} = T_я(1 - e^{-\lambda_я T_к}); \qquad (29)$$

$$T'_{ск} = T_с P\{\tau_с < T_{я.к}\} = T_с(1 - e^{-\lambda_с T_{я.к}}). \qquad (30)$$

Таким образом, среднее время $T''_{л.к}$ выдачи системой ложной информации в течение периода контроля для второй модели будет равно

$$T''_{л.к} = T_{л.к}\,p + T_{л.к}\,q, \qquad (31)$$

или

$$T''_{л.к} = [T_к - T_с(1 - e^{-\lambda_с T_к})] \exp\{-\lambda_я [T_к - T_с(1 - e^{-\lambda_с T_к})]\} +$$
$$+ \{T_я(1 - e^{-\lambda_я T_к}) - T_с[1 - \exp(-\lambda_с T_я(1 - e^{-\lambda_я T_к}))]\} \times$$
$$\times \{1 - \exp[-\lambda_я(T_к - T_с(1 - e^{-\lambda_с T_к}))]\}. \qquad (32)$$

Уравнение для определения среднего реального дохода примет теперь следующий вид:

$$C_{р.д2} = \frac{t\{C'_{и.д}T_к - T''_{л.к}(C'_л + C'_{и.д}) - C'_к - C'_п[(b_1 - 1)T_к + \tau_к]\}}{b_1 T_к + \tau_к} -$$
$$- \frac{tC_0}{t_э} - C_{пр}. \qquad (33)$$

Значение $T_{к.о2}$, соответствующее наибольшему реальному доходу, можно определить из условия равенства нулю производной $\frac{\partial C_{р.д2}}{\partial T_к}$:

$$C'_{и.д}(1 - b_1 T_к) + b_1 C'_к + \tau_к C'_п - (C'_л + C'_{и.д})\left[(b_1 T_к + \tau_к)\frac{\partial T''_{л.к}}{\partial T_к} -\right.$$
$$\left.- b_1 T''_{л.к}\right] = 0, \qquad (34)$$

где

$$\frac{\partial T''_{л.к}}{\partial T_к} = (1 - e^{-\lambda_с T_к})e^{-\lambda_я T_{л.к}} - \lambda_я T_{л.к} e^{-\lambda_я T_{л.к}}(1 - e^{-\lambda_с T_к}) +$$
$$+ e^{-\lambda_я T_к}(1 - e^{-\lambda_с T_{я.к}})(1 - e^{-\lambda_я T_{л.к}}) + \lambda_я e^{-\lambda_я T_{л.к}}(1 - e^{-\lambda_с T_к}) \times$$
$$\times (T_{я.к} - T'_{ск}). \qquad (35)$$

Решить уравнение (34) принципиально можно, но в силу его громоздкости трудно*. В случае, если $\lambda_я \ll \lambda_с$, решения уравнений (34) и (20) совпадают ($T_{к.о2} = T_{к.о1}$).

Наконец, рассмотрим третью модель процесса эксплуатации (см. рисунок, *в*). Она характерна тем, что не только скрытые, но и явные отказы устраняются лишь после очередной контрольной проверки. Так как и в этом случае явный отказ прерывает выдачу ложной информации, то среднее время $T''_{л.к}$ поступления ложной информации в течение периода контроля определяется по (32), но изменяется уравнение для определения среднего времени отсутствия информации за время t:

$$T'_п = m'\tau_к + n'_я T_{в.я} + n'_с T_{в.с} + m' T_{п.к}, \qquad (36)$$

где $T_{п.к}$ — среднее время ожидания начала устранения явного отказа в течение периода контроля — находится аналогично $T_{л.к}$ (3):

$$T_{п.к.} = T_к - T_я(1 - e^{-\lambda_я T_к}). \qquad (37)$$

---

* При решении конкретных задач можно использовать известные численные методы и машинные алгоритмы для решения подобных уравнений.

Соответственно изменятся формулы (7) — (15):

$$n'_{я} = \lambda_{я}(t - T'_{п}); \tag{38}$$

$$n'_{c} = \lambda_{c}(t - T'_{п}); \tag{39}$$

$$b_2 = \lambda_{я} T_{в.я} + \lambda_{c} T_{в.с}; \tag{40}$$

$$m' = \frac{t - T'_{п}}{T_{к} - T_{п.к}} = \frac{t}{T_{к} + \tau_{к} + b_2 (T_{к} - T_{п.к})}; \tag{41}$$

$$T'_{п} = \frac{t\,[b_2 (T_{к} - T_{п.к}) + T_{п.к} - \tau_{к}]}{T_{к} + \tau_{к} + b_2 (T_{к} - T_{п.к})}; \tag{42}$$

$$T'_{л} = m' T''_{л.к} = \frac{t T''_{л.к}}{T_{к} + \tau_{к} + b_2 (T_{к} - T_{п.к})}; \tag{43}$$

$$T'_{р} = t - T'_{п} - T'_{л} = \frac{t\,[T_{к} - T_{п.к} - T_{л.к}]}{T_{к} + \tau_{к} + b_2 (T_{к} - T_{п.к})}. \tag{44}$$

Уравнение для определения среднего реального дохода следующее:

$$C_{р.д3} = \frac{t\,\{C'_{и.д}(T_{к} - T_{п.к}) - T''_{л.к}(C'_{л} + C'_{и.д}) - C'_{к} - C'_{п}\,[b_2 \times}{T_{к} + \tau_{к} + b_2 (T_2 - T_{п.к})} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\times (T_{к} - T_{п.к}) + T_{п.к} + \tau_{к}]\,\}}{T_{к} + \tau_{к} + b_2 (T_{к} - T_{п.к})} - \frac{t C_0}{t_э} - C_{пр}. \tag{45}$$

Аналогично выводу уравнения (34), получим сложное выражение для определения $T_{к.о3}$:

$$(C_{л} + C'_{и.д}) \left\{ \frac{\partial T''_{л.к}}{\partial T_{к}} \left[T_{к} + \tau_{к} + b_2 (T_{к} - T_{п.к})\right] - T''_{л.к} \left[1 + b_2 \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(1 - \frac{\partial T_{п.к}}{\partial T_{к}}\right)\right]\right\} - C'_{и.д}\left[T_{п.к} + \tau_{к} - \frac{\partial T_{п.к}}{\partial T_{к}} (T_{к} + \tau_{к})\right] -$$

$$- C'_{к}\left[1 + b_2\left(1 - \frac{\partial T_{п.к}}{\partial T_{к}}\right)\right] - C'_{п}\left[T_{п.к} + \tau_{к} - (T_{к} + \tau_{к}) \frac{\partial T_{п.к}}{\partial T_{к}}\right] = 0, \tag{46}$$

где $T''_{л.к}$, $\frac{\partial T''_{л.к}}{\partial T_{к}}$, $T_{п.к}$ находятся соответственно по формулам (32), (35), (37) и

$$\frac{\partial T_{п.к}}{\partial T_{к}} = 1 - e^{-\lambda_{я} T_{к}}. \tag{47}$$

В общем случае уравнение (46), как и (34), решить трудно. Если $\lambda_{я} \ll \lambda_{c}$, то решения уравнений (46) и (20) совпадают ($T_{к.о3} = T_{к.о1}$). Если $\lambda_{я} \gg \lambda_{c}$, то $T''_{л.к} = 0$ и уравнение (46) упрощается:

$$(T'_{к.о3} + \tau_{к} + T_{я} + \gamma b_2) e^{-\lambda_{я} T'_{к.о3}} = T' - \gamma, \tag{48}$$

где

$$\gamma = \frac{C'_{\text{к}}}{C'_{\text{и.д}} + C'_{\text{п}}} \qquad (49)$$

коэффициент сравнения стоимостей.

Если к тому же $T_{\text{к}} \ll T_{\text{я}}$, то

$$T_{\text{к.оз}} \approx \sqrt{(\tau_{\text{к}} + \gamma b_2)^2 + 2\,\mathrm{T}_{\text{я}}(\gamma + \tau_{\text{к}} + \gamma b_2)} - \tau_{\text{к}} - \gamma b_2 \qquad (50)$$

или, предполагая, что $\tau_{\text{к}} \ll T_{\text{я}}$ и $b_2 \ll 1$,

$$T'_{\text{к.оз}} \approx \sqrt{2\,\mathrm{T}_{\text{я}}(\tau_{\text{к}} + \gamma)}\,. \qquad (51)$$

Часто, когда период контроля $T_{\text{к}}$ каким-то образом уже выбран, возникает задача оценки эффективности выбранной периодичности контроля. С этой целью введем коэффициент L эффективности периодичности контроля, представляющий собой отношение реальных доходов при оптимальном периоде контроля и существующем:

$$L = \frac{C_{\text{р.д.к}}}{C_{\text{р.д.к.о}}}\,. \qquad (52)$$

Этот показатель позволяет определять, у какой из сравниваемых систем период контроля лучше, а также оценивать целесообразность изменения периода контроля с целью достижения максимальной эффективности использования измерительной системы.

ВЫВОДЫ

Рассмотрен критерий среднего реального дохода, позволяющий оценивать роль периода контроля в повышении эффективности работы измерительных систем длительного использования.

Получены формулы для определения оптимального с точки зрения максимизации величины реального дохода периода контроля для трех различных моделей процесса эксплуатации систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Немировский, В. В. Никонов. Статистический метод установления межповерочных интервалов.— Измерительная техника, 1965, № 9.
2. В. Д. Кудрицкий. Методика расчета сроков обязательной поверки измерительных приборов.— Измерительная техника, 1965, № 9.
3. А. В. Келин, В. М. Криксунов. О сроках поверки радиоизмерительных приборов.— Измерительная техника, 1966, № 3.
4. И. М. Федоров. К вопросу о периодичности ведомственного надзора за измерительными устройствами.— Измерительная техника, 1965, № 9.

Поступила в редакцию
20 июня 1967 г.