

УДК 389 : 681.2.089.6(018)

А. С. НЕМИРОВСКИЙ, А. Г. ПРОЗОРОВ

(Москва)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ
ОПТИМАЛЬНЫХ МЕЖПОВЕРОЧНЫХ ИНТЕРВАЛОВ
ПРИ УСЛОВИИ РЕМОНТА ПРИБОРОВ
ПЕРЕД ПОВЕРКАМИ
С ЧАСТИЧНЫМ ВОССТАНОВЛЕНИЕМ ИХ СВОЙСТВ**

При периодической поверке из всей массы приборов часть неизбежно выходит за поле допуска до наступления очередной поверки, т. е. некоторое время прибор дает неверные результаты измерения. Средняя доля неверных измерений зависит от T — времени между двумя последовательными поверками, т. е. от межповерочного интервала, и от закона распределения времени отсутствия метрологических отказов (времени безотказной работы).

В условиях повышения интенсивности отказов с течением времени имеет смысл сплошной профилактический ремонт при каждой очередной поверке, так как использование прибора без ремонта в последующем после поверки интервале дает высокую интенсивность отказов. После ремонта прибор неполностью восстанавливает свои свойства, поэтому естественно считать, что параметры характеристик надежности приборов зависят от номера поверки. В зависимости от номера поверки меняется и доля неверной работы приборов, которую можно отождествлять с долей неверных измерений для случая постоянной интенсивности использования приборов.

В статье предлагается устанавливать неодинаковые межповерочные интервалы, величины которых зависят от номера поверки, такие, для которых будет наименьшим среднее время неверной работы за все время T использования прибора в течение n межповерочных интервалов (T и n выбираются из соображений экономического характера и ограничения максимальной в каждом интервале доли неверных измерений и считаются заданными). Рассматриваются различные законы распределения времени безотказной работы и приводятся формулы для оптимальных межповерочных интервалов при условии ремонта и частичного восстановления приборов перед поверкой.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

В этом случае вероятность отказа в моменты времени $\tau > t$ определяется $P(\tau > t) = e^{-\lambda t}$, а закон и плотность вероятности отказа соответственно $F(t) = 1 - P(\tau > t) = 1 - e^{-\lambda t}$ и $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Доля отказов в интервале $(t, t+dt)$ равна $f(t)dt$, а среднее время неверных измерений за время T

$$\bar{\theta} = \int_0^T (T-t)f(t)dt = T - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda T}. \quad (1)$$

Если измерения производятся с постоянной интенсивностью, то доля неверных измерений составляет

$$\frac{\bar{\theta}}{T} = 1 - \frac{1}{\lambda T} + \frac{e^{-\lambda T}}{\lambda T}.$$

Этот результат получен в статье [1].

В формуле (1) $\frac{1}{\lambda} = a$ — среднее время между отказами. При больших T $\bar{\theta} \rightarrow T - a$, т. е. в пределе время неверных измерений равно разности между полным и средним временем между отказами. При малых T $\bar{\theta}$ пропорционально T^2 :

$$\bar{\theta} = T - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left[1 - \lambda T + \frac{\lambda^2 T^2}{2} - R(\lambda T) \right] \sim \frac{\lambda T^2}{2}. \quad (2)$$

Формулой (2) можно практически пользоваться в случае, когда допустимое время неверной работы равно $0,1 T$. Аналогично для малых T долю отказавших приборов можно определить из выражения

$$q(t) \approx \lambda T. \quad (3)$$

В этом случае доля неверных измерений в два раза меньше доли отказавших приборов.

Предположение об экспоненциальном законе аналогично предположению об отсутствии износа, так как интенсивность отказов не меняется во времени. Чтобы выбранную схему хотя бы приблизительно привести в соответствие с истинным положением, можно предположить, что интенсивность меняется ступенчато.

Будем считать, что каждому межповерочному интервалу соответствует своя интенсивность. Выбирая разные межповерочные интервалы T_i (i — номер интервала после i -й поверки; первая поверка производится перед началом применения прибора) и зная соответствующие этим интервалам интенсивности λ_i , можно определить полное время неверных измерений, отнесенное к полному времени использования прибора [см. формулу (1)], т. е. долю неверных измерений в случае постоянной интенсивности использования прибора:

$$c = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \bar{\theta}_i = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \left(T_i - \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i} e^{-\lambda_i T_i} \right), \quad (4)$$

где n — число проверок, проводимых в течение всего времени использования прибора (считается, что после $n-1$ ремонта прибор не может быть восстановлен и дальше не используется), а

$$T = \sum_{i=1}^n T_i. \quad (5)$$

Можно выбрать T_i наилучшим образом — так, чтобы доля времени неверных измерений была наименьшей, для чего необходим минимум c при условии (5).

Такой режим проверки, при котором межповерочные интервалы T_1, T_2, \dots, T_n выбираются так, что при известных $f_i(t)$ время неверных измерений минимально, естественно назвать оптимальным.

Задача отыскания T_i для оптимального режима проверки, т. е. задача отыскания минимума c при условии (5), может быть решена методом неопределенных множителей Лагранжа.

Отыскиваем минимум выражения

$$S = cT + \gamma \sum_{i=1}^n T_i.$$

Из условия

$$\frac{\partial S}{\partial T} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n T_i = T$$

получим

$$T_i = \frac{T}{\lambda_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}}. \quad (6)$$

Учитывая, что $\frac{1}{\lambda_i} = a_i$ — среднее время безотказной работы после i -й проверки, формулу (6) можно представить в виде

$$T_i = a_i \frac{T}{\sum_{i=1}^n a_i}. \quad (7)$$

Подставляя в (4) выражение для T_i , определим долю неверных измерений для оптимального режима проверки. Для малых $\lambda_i T_i$

$$c = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \lambda_i T_i^2 + \frac{1}{\lambda_i} R(\lambda_i T_i) \right], \quad (8)$$

где $|R(\lambda_i T_i)| < \frac{\lambda_i^3 T_i^3}{6 \left(1 - \frac{1}{4} \lambda_i T_i\right)}$; подставляя (8) в (6), найдем

$$c = \frac{T}{2 \sum_{i=1}^n a_i}. \quad (9)$$

В частности, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, относительное время неверных измерений обратно пропорционально n — числу поверок (и ремонтов) за время T использования прибора.

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Конечно, время работы не может быть отрицательным, и следовало бы говорить об усеченном нормальном законе, но в первом приближении можно не учитывать «усеченности».

Для нормального закона с параметрами a и σ (a — среднее время безотказной работы; σ^2 — дисперсия) среднюю долю неверных измерений в межповерочном интервале T можно найти из выражения

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{-\frac{(a-\tau)^2}{2\tau^2}} - \frac{a-\tau}{\tau} \Phi(a-\tau), \quad (10)$$

где

$$c = \frac{\bar{\theta}}{T}; \quad \tau = \frac{T}{\sigma}; \quad \alpha = \frac{a}{\sigma}.$$

На рис. 1 приводится соответствующий формуле (10) график* $c(\tau)$ при различных значениях α . Пользуясь этим графиком, легко по

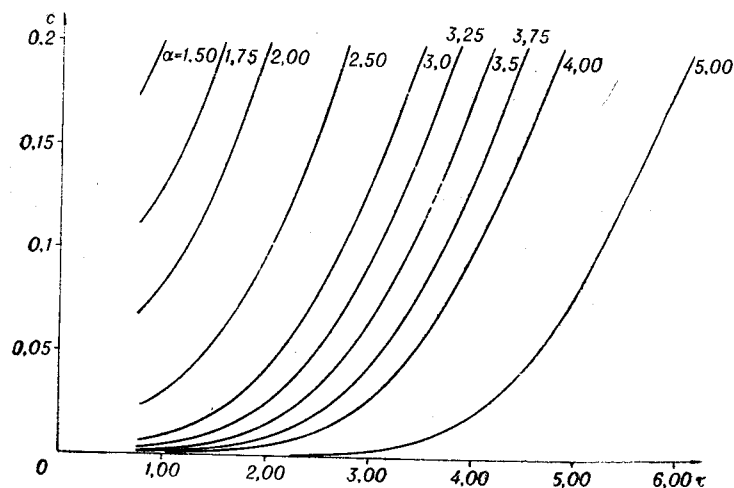


Рис. 1.

заданной доле неверных измерений и известным из экспериментальных данных a и σ , т. е. по $\alpha = \frac{a}{\sigma}$, устанавливать межповерочные интервалы $T = \tau\sigma$. Причем, если от поверки к поверке параметры a и σ изменяются, то межповерочные интервалы по этому графику можно выбирать, например, так, чтобы доля неверных измерений оставалась постоянной.

* Расчеты, необходимые для построения графиков и составления таблицы, выполнены В. Ф. Колокольчиковым.

Сравнивая нормальный закон распределения времени безотказной работы с экспоненциальным, нетрудно заметить, что для нормального закона при практически приемлемых долях неверных измерений ($c \approx 0,1 \div 0,2$) межповерочные интервалы приблизительно равны математическому ожиданию времени наработки на отказ a , в то время как для экспоненциального закона межповерочный интервал T составляет приблизительно $2ca$. Это объясняется тем, что нормальный закон учитывает старение приборов со временем; интенсивность выхода прибора из строя возрастает во времени; большинство отказов происходит при t , близких к a . Если в этот момент или немного раньше сделать проверку, то доля неверных измерений будет небольшой, хотя доля отказавших приборов существенна. Однако если не произвести профилактического ремонта прибора при проверке (т. е. прибор будет работать по старому закону безотказной работы), то в следующей межповерочный интервал доля неверных измерений резко возрастает. Экспоненциальный закон не учитывает старения приборов; интенсивность отказов постоянна, т. е. новые приборы выходят из строя с той же вероятностью, что и прослужившие сколь угодно большой срок. Поэтому по сравнению с экспоненциальным законом в случае нормального закона межповерочные интервалы резко увеличиваются. Заметим, что из результатов статьи [2] следует, что при приемке приборов по суженным допускам закон распределения времени безотказной работы может быть близок к нормальному. (Как видно из рис. 4 статьи [2], при больших K и $\xi = ct$ закон распределения $F = 1 - P(t)$ близок к нормальному).

При заданном общем времени работы прибора и количестве проверок можно выбрать межповерочные интервалы таким образом, чтобы доля неверных измерений была минимальной. В этом случае минимизируется функция

$$S = cT + \gamma \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \left[T_i - a_i \right] \Phi \left(\frac{T_i - a_i}{\sigma_i} \right) + \frac{(T_i - a_i)^2}{2\sigma_i^2} + \frac{\sigma_i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T_i - a_i)^2}{2\sigma_i^2}} + \gamma T_i,$$

в результате чего получаются расчетные формулы для определения оптимальных межповерочных интервалов и суммарной доли неверных измерений:

$$T_i = a_i + \left(T - \sum_{i=1}^n a_i \right) \frac{\sigma_i}{\sum_{i=1}^n \sigma_i}; \quad (11)$$

$$c_s = \frac{\tau_s - a_s}{\tau_s} \Phi(\tau_s - a_s) + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \tau} e^{-\frac{1}{2}(\tau_s - a_s)^2}, \quad (12)$$

где

$$a_s = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n \sigma_i}; \quad \tau_s = \frac{T}{\sum_{i=1}^n \sigma_i}.$$

Формула (12) идентична формуле (10), поэтому для подсчета можно использовать график рис. 1.

ЗАКОН ВЕЙБУЛЛА

Для закона Вейбулла плотность распределения времени безотказной работы описывается выражением

$$f_i(t) = \frac{m_i}{T_{0i}} t^{m_i-1} e^{-\frac{t^{m_i}}{T_{0i}}} \quad (t \geq 0),$$

где T_{0i} и m_i — некоторые параметры распределения, зависящие от состояния прибора после i -й проверки.

Нетрудно видеть, что время правильной работы прибора будет равно

$$R = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{T_i} t f_i(t) dt + T_i \int_{T_i}^{\infty} f_i(t) dt \right]. \quad (13)$$

Аналогично отыскивается максимум этой величины при условии $\sum_{i=1}^n T_i = T$ и оптимальные интервалы из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{T_i^{m_i}}{T_{0i}} - \lambda = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \\ \sum_{i=1}^n T_i = T, \end{cases} \quad (14)$$

где $\lambda = -\ln \gamma$.

Рассмотрим частный случай, когда отношения G среднего значения времени безотказной работы к его среднеквадратическому отклонению (формулы для определения этих величин имеются, например, в [3]) не изменяются от ремонта к ремонту, т. е.

$$G(T_{0i}, m_i) = \frac{\frac{1}{T_{0i}^{m_i}} \Gamma\left(\frac{1}{m_i} + 1\right)}{\frac{1}{T_{0i}^{m_i}} \sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{m_i} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{m_i} + 1\right)}} = \text{const} \quad (15)$$

или $m_i = m = \text{const}$. В этом случае решение системы (14) будет таким:

$$T_i = \frac{T}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{0i}^m}} \frac{1}{T_{0i}^m}. \quad (16)$$

Как и в предыдущих случаях, можно определить среднее время неверных измерений $\bar{\theta}$:

$$\bar{\theta}_i = T_i \left(1 - e^{-\frac{T_i^{m_i}}{T_{0i}}}\right) - \frac{m_i}{\sqrt{T_{0i}}} \left(\frac{1}{m_i}, \frac{T_i^{m_i}}{T_{0i}}\right)! \quad (17)$$

Здесь символом $(\dots)!$ обозначена неполная гамма-функция

$$(x, y)! = \int_0^y e^{-t} t^x dt.$$

Если $G(T_{0i}, m_i) \neq \text{const}$, можно использовать, например, графо-аналитический метод, строя n графиков функции $\lambda(T_i; m_i, T_{0i})$ с известными параметрами m и T_{0i} и подбирая по графику такое значение λ , при котором $\sum_{i=1}^n T_i = T$ (рис. 2).

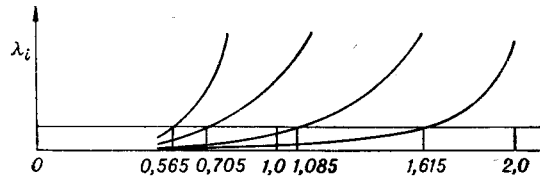


Рис. 2.

Для практического расчета удобно пользоваться разложением $\bar{\theta}_i$ в ряд

$$c_i = \frac{\bar{\theta}_i}{T_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \frac{x_i}{x_i + n} y_i^n, \quad (18)$$

где

$$x_i = \frac{1}{m_i}; \quad y_i = \frac{T_i^{m_i}}{T_{0i}}$$

причем при $y_i < 0.4$ и $x_i < 1$ достаточно ограничиться первыми двумя-тремя членами ряда.

ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

$$f_i(t) = \frac{\lambda_i^{m_i} t^{m_i-1}}{\Gamma(m_i)} e^{-\lambda_i t} \quad (t \geq 0).$$

Здесь λ и m связаны известными соотношениями:

$$a = \frac{m}{\lambda}; \quad \sigma^2 = \frac{m}{\lambda^2}.$$

Время неверных измерений определяется следующей формулой:

$$\bar{\theta}_i = \frac{1}{\Gamma(m_i)} \left\{ T_i [(m_i-1), y_i]! - \frac{1}{\lambda_i} (m_i, y_i)! \right\}, \quad (19)$$

где

$$y_i = \lambda_i T_i.$$

Аналогичное предыдущему случаю предположение о постоянстве отношения $\frac{a_i}{\sigma_i}$ можно представить так:

$$G(\lambda_i, m_i) = \sqrt{m_i} = \text{const.}$$

т. е. $m_i = \text{const.}$ Приравняв нулю частные производные по T_i от

$$L = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{T_i} (T_i - t) f_i(t) dt - \gamma T_i \right], \text{ получаем систему уравнений:}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m_i)} \int_0^{T_i} k^{m_i} e^{-u} du = \gamma; \\ \sum_{i=1}^n T_i = T. \end{cases} \quad (20)$$

Отсюда и из $m_i = \text{const.}$ следует, что $\lambda_i T_i = \text{const.}$ Это приводит к расчетным формулам

$$T_i = \frac{T}{\lambda_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j}} \quad (21)$$

для определения оптимальных межповерочных интервалов для частного случая $m_1 = m_2 = \dots = m_n$.

В общем случае для неодинаковых m_i можно для определения оптимальных интервалов пользоваться графоаналитическим методом, строя функции $\gamma(\lambda_i; T_i, m_i)$ по первым формулам (20).

ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ ПЛОТНОСТЕЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО И НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассматриваем плотность распределения

$$f_i(t) = \mu_1 \lambda_i e^{-\lambda_i t} + \mu_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} e^{-\frac{(t-a_i)^2}{2\sigma_i^2}}.$$

Доля неверных измерений получается как соответствующая линейная комбинация формул (1) и (11):

$$c_i = \mu_1 \frac{1}{T_i} \left(T_i - \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i} e^{-\lambda_i T_i} \right) + \mu_2 \left[-\left(\frac{a_i}{\tau_i} - 1 \right) \Phi(\tau_i - a_i) + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \tau_i} e^{-\frac{(\tau_i - a_i)^2}{2}} \right], \quad (22)$$

где

$$a_i = \frac{a_i}{\sigma_i}; \quad \tau_i = \frac{T_i}{\sigma_i}.$$

Оптимальные межповерочные интервалы определяются минимизацией

$$L = \sum_{i=1}^n c_i T_i + \gamma T.$$

Как и в предыдущих случаях, можно воспользоваться графоаналитическим методом, строя графики функций

$$\gamma_i(T_i) = \mu_1(1 - e^{-\lambda_i T_i}) + \mu_2 \Phi\left(\frac{T_i - a_i}{\sigma_i}\right)$$

и выбирая T_i из условий $\sum_{i=1}^n T_i = T$ и $\gamma_i = \gamma = \text{const}$.

В некоторых случаях можно, однако, линеаризировать функцию $\gamma(T_i)$ и упростить решение. Такая линеаризация приводит к уравнениям:

$$\begin{cases} \mu_1 \lambda_i T_i + \mu_2 \frac{T_i - a_i}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} - \bar{\gamma} = 0; \\ \sum_{i=1}^n T_i = T, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$\bar{\gamma} = \gamma + \text{const}.$$

В результате решения этой системы имеем

$$T_i = \frac{a_i \mu_2 + \sqrt{2\pi} \sigma_i \bar{\gamma}}{\sqrt{2\pi} \sigma_i \mu_1 \lambda_i + \mu_2}, \quad (24)$$

где

$$\bar{\gamma} = \left[T - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_2 a_i}{\sqrt{2\pi} \mu_1 \lambda_i \sigma_i + \mu_2} \right] \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{2\pi} \sigma_i}{\sqrt{2\pi} \sigma_i \mu_1 \lambda_i + \mu_2}}.$$

ПРИМЕР И ВЫВОДЫ

В заключение приведем результаты расчета примера для $n=4$, частных значений a_i и σ_i и различных законов распределения (см. таблицу).

Полученные в результате расчета примера данные показывают, что выбор оптимальных межповерочных интервалов позволяет в несколько раз уменьшить долю неверных измерений при том же числе проверок. Доля неверных измерений при нормальном законе распределения значительно меньше, чем при экспоненциальном. Отсюда следует, что для приборов с экспоненциальным законом времени безотказной работы требуются намного меньшие межповерочные интервалы и соответственно намного больше проверок.

a	σ	Экспоненциальный закон				Нормальный закон			
		обычный режим		оптимальный режим		обычный режим		оптимальный режим	
		T	c	T	c	T	c	T	c
2,250	0,600	1	0,19	1,50	0,27	1	0,004	1,558	0,024
1,750	0,500	1	0,24	1,17	0,27	1	0,015	1,174	0,026
1,250	0,385	1	0,31	0,83	0,27	1	0,066	0,807	0,029
0,750	0,250	1	0,45	0,50	0,27	1	0,071	0,462	0,034
—	—	—	0,30	—	0,27	—	0,088	—	0,027

Кроме того, при экспоненциальном законе доля неверных измерений в межповерочном интервале примерно в два раза меньше числа бракуемых по точности приборов, в то время как при нормальном законе она во много раз меньше.

Все упомянутое выше говорит о необходимости при изучении метрологической надежности обращать особое внимание на выявление характера закона распределения, а при создании и регулировке приборов на то, чтобы закон распределения времени безотказной работы был близок к нормальному (см. [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Немировский, В. В. Никонов. Статистический метод установления межповерочных интервалов.— Измерительная техника, 1965, № 9.
2. А. В. Келин, В. М. Криксунов. О сроках проверки радиоизмерительных приборов.— Измерительная техника, 1966, № 3.
3. Я. Б. Шор. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. М., «Советское радио», 1962.

Поступила в редакцию
23 сентября 1966 г.,
окончательный вариант —
27 декабря 1966 г.