А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1967

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

УДК 681.2.08

З. А. ЛИВШИЦ
(Новосибирск)

О КРИТЕРИЯХ СРАВНЕНИЯ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ

Многие теоретические вопросы, а также практика использования средств измерения ставят задачу выбора критериев. Некоторые соображения по поводу такого выбора содержатся в ряде известных работ (см., например, [1, 2]). Однако вопрос об общих свойствах метрологических критериев и взаимоотношениях между ними практически не рассматривался.

При проектировании и использовании систем измерения, контроля и диагностики всегда возникают задачи, связанные с нормированием, оценкой и сравнением указанных средств получения информации по некоторым наперед выбранным признакам (критериям). Такие признаки могут иметь весьма разнообразный характер и определяться не только метрологическими свойствами прибора, хотя последние должны учитываться любым разумно выбранным критерием. Важнейшими примерами такого рода сложных критериев являются критерии экономические, которые наиболее существенны в производственной практике.

Ниже будет сделана попытка выяснить некоторые свойства критериев в предположении, что на них наложен ряд естественных ограничений.

Введем некоторые определения и обозначения, необходимые для последующего изложения. Под заданием прибора П будем понимать задание функции $f(z/x)$ — условной плотности распределения вероятностей показаний прибора z при фиксированном значении измеряемой величины x. Будем говорить, что Π_1 не хуже Π_2 при измерении величины x, распределенной с плотностью вероятностей $f(x)$, в смысле критерия G, основанного на функции штрафов $\varphi(x, z)$ (и обозначать это $\Pi_1 \overset{G}{\underset{f(x)}{\geqslant}} \Pi_2$), если

$$\int\left(\int\varphi(x,z)\,f_1(z/x)\,dz\right)f(x)\,dx \leqslant \int\left(\int\varphi(x,z)\,f_2(z/x)\,dz\right)f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Здесь $f_i(z/x)$, $i=1,2$ — условная плотность распределения вероятностей показаний прибора Π_i при фиксированном значении измеряемой величины. Назовем критерий G «разумным», если он основан на функции штрафов, удовлетворяющей следующим требованиям:

1) $\varphi(x,z) \geqslant 0$ для любой пары (x,z); 2) для любого x $\varphi(x,x)=0$; 3) для любого значения измеряемой величины x и для любой пары показаний прибора z_1 и z_2 таких, что $x_1 \leqslant z_1 \leqslant z_2$, всегда $\varphi(x,z_1) \leqslant \varphi(x,z_2)$; если же $z_1 \leqslant z_2 \leqslant x$, то $\varphi(x,z_1) \geqslant \varphi(x,z_2)$.

Поясним условия 1—3. Условие 1 означает, что каждая ошибка измерения «облагается штрафом». Естественно, что если измерение выполнено точно, то штраф равен нулю (условие 2). Требование 3 содержательно означает, что большее отклонение от истинного значения «карается суровее», чем меньшее, при условии, что отклонения имеют одинаковый знак, т. е. при фиксированном x разумная функция штрафов имеет два участка монотонности.

Отметим, что можно рассматривать более общие ограничения на «разумность», а именно можно было бы заменить условия 1 и 2 единственным условием: для любых x и z $\varphi(x,z) \geqslant \varphi(x, x)$. Это соответствовало бы ситуации, в которой учитывается «польза» от проведенных операций измерения. Все приведенные ниже рассуждения могли бы быть использованы и для рассмотрения этого случая. Однако для упрощения изложения выбраны принятые условия 1—3.

В дальнейшем изучаются лишь критерии, функции штрафов которых удовлетворяют условиям разумности 1—3. Легко видеть, что таковыми, в частности, являются общеупотребительные метрологические критерии среднего квадрата и среднего модуля погрешности измерения. С другой стороны, очевидно, что в класс рассматриваемых в работе критериев не попадает критерий среднего количества информации, содержащейся в показаниях прибора об измеряемой величине.

Приведем простой, но полезный для дальнейшего изложения п р и м е р 1. Пусть приборы $П_1$ и $П_2$ имеют диапазон измерения $[0, L]$ (заметим попутно, что, говоря о сравнении двух приборов, мы всегда будем подразумевать сравнения на одинаковом диапазоне): шкала прибора $П_1$ состоит из двух делений, равных между собой, шкала прибора $П_2$ — из трех равных делений. Предположим дополнительно, что случайная погрешность измерения пренебрежимо мала, т. е. присутствует лишь ошибка, связанная с квантованием. Используем для сравнения $П_1$ и $П_2$ критерий среднего квадрата разности между показаниями прибора и истинным значением измеряемой величины — критерий, основанный на функции штрафа $\varphi(x, z) = k(z-x)^2$, где k — положительное число.

В случае, когда измеряемая величина распределена равномерно на $[0, L]$, $П_2$, очевидно, лучше, чем $П_1$. Рассмотрим теперь следующее распределение: плотность вероятностей измеряемой величины есть δ-функция в точке $\frac{11}{16}L$. Вычисляя среднеквадратическую ошибку каждого из приборов в предположении, что если значение измеряемой величины попадает в i-й квант, то показание прибора есть $iq - \frac{q}{2}$, где q — величина шага квантования по уровню, получим

$$\sigma_1^2 = \frac{k}{256} L^2; \qquad \sigma_2^2 = \frac{9k}{256} L^2. \tag{2}$$

Следовательно, на данном распределении прибор $П_1$ с меньшим количеством делений лучше прибора $П_2$ с бо́льшим количеством делений в смысле выбранного критерия.

Пример 1 показывает, что, вообще говоря, нельзя утверждать, что один прибор лучше другого по некоторому критерию, не указывая «ситуации», в которой эти приборы применяются. В связи с этим естественно возникает вопрос о существовании таких критериев, что отношение порядка между приборами, определяемое критериями, инвариантно относительно распределения вероятностей измеряемой величины.

Дальнейшее изложение проводится для приборов, погрешностью квантования которых можно пренебречь. Это позволит сделать более прозрачной качественную сторону изучаемого вопроса.

Назовем критерий G, основанный на функции штрафов $\varphi(x, z)$, достаточным для сравнения приборов Π_1 и Π_2, если знак в неравенстве (1) неизменен для любого распределения измеряемой величины.

В дальнейшем часто будет использоваться следующее замечание: критерий G является достаточным для сравнения Π_1 и Π_2 тогда и только тогда, если

$$\int\varphi(x,z) f_1(z/x)\, dz \leqslant \int\varphi(x,z) f_2(z/x) dz \tag{3}$$

почти для всех значений измеряемой величины или

$$\int\varphi(x,z) f_1(z/x) dz \geqslant \int\varphi(x,z) f_2(z/x) dz \tag{3a}$$

почти для всех x.

В случае, когда функции $\alpha_i(x) = \int\varphi(x,z) f_i(z/x)\, dz,\ i = 1,2$ являются непрерывными выполнение неравенства (3) [или соответственно (3a)] требуется, очевидно, для всех x.

В самом деле, если на некотором множестве значений измеряемой величины S_1 положительной меры $\alpha_1(x) < \alpha_2(x)$, а на множестве S_2 таком, что мера S_2 больше нуля, $\alpha_1(x) > \alpha_2(x)$, то прибор Π_1 будет лучше прибора Π_2 на распределении измеряемой величины, «сконцентрированном» в S_1, и хуже на распределении, сконцентрированном в S_2.

Достаточность условия, указанного в замечании, вытекает из следующего простого факта: если $A_1(x) \leqslant A_2(x)$ почти для всех x, а $g(x) \geqslant 0$ то

$$\int A_1(x) g(x) dx \leqslant \int A_2(x) g(x)\, dx. \tag{4}$$

Если для некоторого множества приборов π критерий G достаточен для сравнения двух любых приборов из π, то будем говорить, что G является универсальным критерием для π.

Ясно, что наличие универсального критерия для множества приборов позволяет удовлетворительно решать задачу сравнения любых двух приборов из этого множества. В то же время существование универсального критерия еще не гарантирует успешного решения задачи нормирования. Действительно, если критерий универсален, то это означает то, что для любой пары «разных» приборов существует распределение, на котором они различаются в смысле этого критерия (т. е. существует $f(x)$ такая, что $\Pi_1 \overset{G}{\underset{f(x)}{\geqslant}} \Pi_2$, и неверно, что $\Pi_2 \overset{G}{\underset{f(x)}{\geqslant}} \Pi_1$). Однако неясно, существует ли хотя бы одно распределение измеряемой величины, на котором одновременно различались бы все такие пары приборов. Отсюда следует, что доказательство универсальности некоторого критерия не является, вообще говоря, решением задачи о существовании распределения измеряемой величины, «эталонного» для данного критерия.

(Под эталонным распределением для некоторого множества приборов π и критерия G, универсального для π, понимается распределение измеряемой величины $\theta(x)$, обладающее следующими свойствами: 1) если $П_1$ «лучше» $П_2$ на $\theta(x)$, то $П_1 \underset{f(x)}{\overset{G}{\geqslant}} П_2$ для любого распределения измеряемой величины; 2) если $П_1$ и $П_2$ «одинаковы» на $\theta(x)$, то они одинаковы и на любом другом распределении.)

Изучим теперь вопрос о наличии универсальных критериев для некоторых важных классов приборов. Пусть Н — множество приборов, которые обладают независимой аддитивной случайной погрешностью. Тогда всякий критерий G, основанный на функции штрафов $\varphi(x, z)$, зависящей только от разности между истинным значением измеряемой величины и показанием прибора [т. е. если $z_1 - x_1 = z_2 - x_2$, то $\varphi(x_1, z_1) = \varphi(x_2, z_2)$], будет универсальным для класса Н. Это утверждение непосредственно вытекает из определения универсального критерия и сделанного выше замечания, так как если $П \in Н$, то

$$\alpha_п(x) = \int \varphi(x,z) f_п(z/x) dz = \text{const}. \qquad (5)$$

Если допустить, что функция штрафов выделяет некоторые значения измеряемой величины [т. е. одновременное выполнение условий $z_1 - x_1 = z_2 - x_2$ и $\varphi(x_1, z_1) \neq \varphi(x_2, z_2)$], то критерий, основанный на такой функции штрафов, может не быть универсальным для Н. Пример, иллюстрирующий это, умышленно выбран весьма грубым с целью облегчить выяснение содержательного смысла сделанного утверждения.

Пример 2. Пусть погрешность прибора $П_1$ есть дискретная случайная величина, могущая принимать значение 0,5 с вероятностью $\frac{1}{2}$ и значение 2,0 с той же вероятностью. Случайная погрешность второго прибора с равной вероятностью принимает значение 1,0 и 1,5. Область возможных значений измеряемой величины состоит из 0 и 1. Применим для сравнения приборов критерий, основанный на функции штрафов, заданной следующей таблицей:

$$\varphi(0,\ 0{,}5) = 1;\ \varphi(0,\ 1) = 5;\ \varphi(0,\ 1{,}5) = 7;\ \varphi(0,\ 2) = 8;$$

$$\varphi(1,\ 1{,}5) = 2;\ \varphi(1,\ 2) = 3;\ \varphi(1,\ 2{,}5) = 6;\ \varphi(1,\ 3) = 10.$$

Покажем, что такой критерий недостаточен для сравнения $П_1$ и $П_2$ (т. е. не является универсальным для Н).

В самом деле, если измеряемая величина принимает значение 0 с вероятностью $\frac{1}{10}$, а значение 1 с вероятностью $\frac{9}{10}$, то

$$\varphi_{1ср} = 5{,}85; \quad \varphi_{2ср} = 4{,}65; \quad \varphi_{1ср} > \varphi_{2ср}. \qquad (6)$$

На распределении же $P(0) = \frac{9}{10}$; $P(1) = \frac{1}{10}$

$$\varphi_{1ср} = 4{,}65; \quad \varphi_{2ср} = 5{,}85; \quad \varphi_{1ср} < \varphi_{2ср}. \qquad (7)$$

С другой стороны, существуют универсальные для Н критерии, основанные на функциях штрафов, выделяющих некоторые значения измеряемой величины. Простейшим примером такой функции является следующая:

$$\psi(x, z) = c_1\varphi(x,z), \text{ если } x \leqslant \frac{L}{2};$$

$$\psi(x, z) = c_2\varphi(x, z), \text{ если } x > \frac{L}{2}; \tag{8}$$

К более подробному описанию класса критериев, универсальных для Н, мы вернемся несколько позже.

Перейдем теперь к изучению более широкого случая. Рассмотрим множество 0 приборов, погрешность которых есть аддитивная ко входу прибора и зависящая от него случайная величина (т. е., по существу, множество всех приборов). Нетрудно заметить, что универсального критерия для 0 не существует.

В самом деле, каким бы ни был критерий G, он недостаточен для сравнения, скажем, такой пары приборов Π_1 и Π_2: Π_1 «идеален» на правой части шкалы и «грешит» на левой части; Π_2, наоборот, неточен в правой и точен в левой части шкалы. Выбирая распределения f_1 и f_2, сосредоточенные соответственно в правой и левой частях диапазона, получаем:

$$\Pi_1 \underset{f_1(x)}{\overset{G}{>}} \Pi_2; \qquad \Pi_2 \underset{f_2(x)}{\overset{G}{>}} \Pi_1. \tag{9}$$

Таким образом, G не может быть универсальным для класса 0.

Из изложенного выше ясно, что существование для класса приборов универсального критерия и тем более критерия, для которого имеется эталонное распределение, накладывает сильные ограничения на обширность этого класса. Это обстоятельство, а также тот факт, что на практике часто затруднительно «увязать» все интересующие нас признаки прибора в один критерий, делают естественной постановку вопроса о «взаимоотношениях» различных критериев. Прежде всего приведем простой пример, который показывает, что даже универсальные критерии могут «тянуть в разные стороны», т. е. для пары критериев G_1 и G_2 найдется пара приборов Π_1 и Π_2 и такое распределение $f(x)$ измеряемой величины, что

$$\Pi_1 \underset{f(x)}{\overset{G_1}{>}} \Pi_2, \qquad \Pi_2 \underset{f(x)}{\overset{G_2}{>}} \Pi_1. \tag{10}$$

Пример 3. Рассмотрим класс Н и критерии, основанные на функциях штрафов $\varphi_1(x, z) = (z - x)^2$ и $\varphi_2(x, z) = |z - x|$ соответственно. Пусть погрешность первого прибора распределена равномерно на промежутке $[-a, a]$, а погрешность второго прибора имеет треугольное распределение на промежутке $[-b, b]$.

Тогда для первого прибора

$$\varphi_{1\text{ср}}^{(1)} = \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{2a}\, dx = \frac{a^2}{3}; \quad \varphi_{2\text{ср}}^{(1)} = 2\int_{0}^{a} \frac{x}{2a}\, dx = \frac{a}{2}. \tag{11}$$

Полагая $b = \frac{17}{12} a$, видим, что в этом случае

$$\varphi_{1ср}^{(2)} = \frac{289}{864} a^2 < \varphi_{1ср}^{(1)} = \frac{a^2}{3}; \quad \varphi_{2ср}^{(2)} = \frac{17}{36} a > \varphi_{2ср}^{(1)} = \frac{a}{2}. \tag{13}$$

Итак, для любого распределения измеряемой величины прибор Π_1 лучше прибора Π_2 по первому критерию и хуже него в смысле второго критерия.

Введем еще одно определение. Назовем критерии G_1 и G_2 эквивалентными, если для любой пары приборов Π_1 и Π_2 и для любого распределения $f(x)$ $\Pi_1 \underset{f(x)}{\overset{G_1}{\geqslant}} \Pi_2$ тогда и только тогда, если $\Pi_1 \underset{f(x)}{\overset{G_2}{\geqslant}} \Pi_2$.

Возникает вопрос, какими должны быть функции штрафов $\varphi_1(x, z)$ и $\varphi_2(x, z)$, чтобы критерии, основанные на них, были бы эквивалентными. Оказывается, эти функции должны быть связаны весьма тесно; именно, имеет место следующее утверждение: для того чтобы критерии G_1 и G_2 были эквивалентны, необходимо, а в случае универсальных критериев и достаточно, чтобы при фиксированном x функции $\varphi_1(x, z)$ и $\varphi_2(x, z)$ были линейно зависимы на обоих участках монотонности.

Для доказательства необходимости приведенного выше условия нам потребуется следующее вспомогательное замечание: пусть G_1 и G_2 эквивалентны; зафиксируем произвольное значение x_0 измеряемой величины; тогда для любых четырех значений z_1, z_2, z_3 и z_4, таких что $x_0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4$, должны одновременно выполняться неравенства:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0,z_1) + \varphi_1(x_0,z_4) &\geqslant \varphi_1(x_0,z_2) + \varphi_1(x_0,z_3); \\ \varphi_2(x_0,z_1) + \varphi_2(x_0,z_4) &\geqslant \varphi_2(x_0,z_2) + \varphi_2(x_0,z_3) \end{aligned} \tag{14}$$

или

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0,z_1) + \varphi_1(x_0,z_4) &\leqslant \varphi_1(x_0,z_2) + \varphi_1(x_0,z_3); \\ \varphi_2(x_0,z_1) + \varphi_2(x_0,z_4) &\leqslant \varphi_2(x_0,z_2) + \varphi_2(x_0,z_3). \end{aligned} \tag{15}$$

Предположим, что эти условия не выполняются, и покажем, что тогда существует пара приборов Π_1 Π_2 и распределения измеряемой величины такие, что $\Pi_1 \underset{f(x)}{\overset{G_1}{>}} \Pi_2$ и $\Pi_2 \underset{f(x)}{\overset{G_2}{>}} \Pi_1$. В качестве таких приборов можно выбрать следующие: Π_1 обладает независимой аддитивной погрешностью, могущей принимать значения $z_1 - x_0$ и $z_4 - x_0$ с вероятностью, равной $\frac{1}{2}$, а погрешность прибора Π_2 с равной вероятностью принимает значения $z_2 - x_0$ и $z_3 - x_0$. Тогда на распределении измеряемой величины, сосредоточенном в точке x_0, первый прибор лучше второго в смысле одного критерия, а второй прибор лучше первого в смысле другого критерия, т. е. G_1 и G_2 не являются эквивалентными. Таким образом, для эквивалентных критериев необходимо выполнение (14) или (15).

Изучим теперь связь между $\varphi_1(x_0, z)$ и $\varphi_2(x_0, z)$. Ввиду условия (3), наложенного на «разумность» функций штрафов, между функциями $\varphi_1(x_0, z)$ и $\varphi_2(x_0, z)$ существует однозначная функциональная зависимость при $z>x_0$. Обозначим $\varphi_1(x_0, z)=t$, $\varphi_2(x_0, z)=y$, а зависимость между ними $y=\psi(t)$. Из предыдущего ясно, что функция $\psi(t)$ есть монотонно возрастающая, для которой одновременно выполняются неравенства:

$$t_2 - t_1 \leqslant t_4 - t_3;\ \psi(t_2) - \psi(t_1) \leqslant \psi(t_4) - \psi(t_3) \tag{16}$$

или

$$t_2 - t_1 \geqslant t_4 - t_3;\ \psi(t_2) - \psi(t_1) \geqslant \psi(t_4) - \psi(t_3) \tag{17}$$

для любой четверки $0<t_1<t_2<t_3<t_4$.

Пусть, например, выполняются неравенства (16); тогда функция $\psi(t)$ является вогнутой.

Предположим с целью некоторого упрощения доказательства дифференцируемость функции $\psi(t)$, тогда из вогнутости $\psi(t)$ следует, что $\psi'(t)$ есть возрастающая функция. Проведя аналогичные рассуждения относительно функции $t=\eta(y)$, приходим к выводу, что функция $\eta'(y)$ также является возрастающей. Однако $\eta(y)$ есть обратная функция к $\psi(t)$, и, следовательно, их производные связаны соотношением

$$\eta'(y) = \frac{1}{\Psi'(\eta(y))}\ . \tag{18}$$

Из (18) видно, что $\eta'(y)$ и $\psi'(t)$ могут быть одновременно неубывающими тогда и только тогда, если

$$\psi'(t) = \mathrm{const},\ \text{т. е.}$$

$$\Psi(t) = c_{x_0} t + d, \tag{19}$$

причем, если функции штрафов непрерывны, как функции z в точке $z=x_0$, то $d=0$.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда выполняются неравенства (17), а также связь между функциями φ_1 и φ_2 при значениях $z<x_0$. Доказанный результат можно сформулировать следующим образом: если критерии G_1 и G_2 эквивалентны, то функции штрафов, на которых они основаны, связаны соотношениями:

$$\varphi_2(x,z) = c(x)\,\varphi_1(x,z) + d(x). \tag{20}$$

$$\varphi_2(x,z) = c_2(x)\,\psi_1(x,z) + d_1(x),\ \text{если}\ x < z.$$

(Нетрудно показать, что константы c_{1x_0} и c_{2x_0}, соответствующие участкам $x\leqslant z$ и $x>z$, равны.) Как и прежде, в случае непрерывности функции штрафов $d(x)=0$. Заметим, что в приведенном доказательстве нигде не возникало нужды в рассмотрении приборов с зависимыми погрешностями, т. е. утверждение справедливо даже для критериев, рассматриваемых только над множеством Н. Это замечание понадобится нам при описании совокупности всех критериев, универсальных для Н.

Предположим теперь, что критерий G_1, опирающийся на функцию $\varphi_1(x, z)$, универсален и для функций штрафов $\varphi_1(x, z)$ и $\varphi_2(x, z)$, выполняются соотношения (20). Докажем, что в этом случае G_1 и G_2 будут эквивалентны. Из универсальности критерия G_1 вытекает, что для любого x_0 и любой пары приборов Π_1 и Π_2 выполняются условия (3). Пусть, например, для некоторой пары приборов выполняется первое из соотношений (3), т. е. для любого значения x_0 измеряемой величины

$$\int \varphi_1(x_0,z) f_1(z/x_0) dz \leqslant \int \varphi_1(x_0,z) f_2(z/x_0)\, dz, \tag{21}$$

но тогда, применяя для сравнения Π_1 и Π_2 критерий G_2 и учитывая соотношения (20) и (21), получаем

$$\int \varphi_2(x_0,z) f_1(z/x_0) dz = \int c\,(x_0)\varphi_1(x_0,z) f_1(z/x_0)\, dz \leqslant$$

$$\leqslant \int c(x_0)\varphi_1(x_0,z) f_2(z/x_0)\, dz = \int \varphi_2(x_0,z) f_2(z/x_0) dz\,. \tag{22}$$

Следовательно, показано, что если один прибор лучше другого по первому критерию, то это отношение остается в силе и для второго критерия, т. е. G_1 и G_2 эквивалентны. Утверждение доказано полностью.

Приведем пример эквивалентных критериев. Пусть рассматривается множество приборов с независимыми аддитивными погрешностями: тогда критерии, основанные на функциях штрафов $\varphi_1(x, z) = |z - x|$ и $\varphi_2(x,z) = \frac{|z - x|}{x}$ (т. е. критерии средней абсолютной погрешности и относительной погрешности), очевидно, будут универсальными. Из доказанного утверждения следует эквивалентность этих критериев над Н.

Применим теперь полученный результат для описания класса критериев, универсальных для Н. Прежде всего заметим, что любой критерий, связанный соотношениями (20) с функцией штрафов, зависящей только от $z - x$, будет универсальным для Н. Это вытекает из достаточности доказанного условия для случая универсальных критериев. Покажем, что любой универсальный для Н критерий имеет такой же вид, т. е. если критерий G, опирающийся на функцию штрафов $\varphi(x, z)$, является универсальным для Н, то он эквивалентен некоторому критерию, основанному на функции штрафов, зависящей только от $z - x$.

Предположим противное. Заметим, что при любом фиксированном значении x_0 измеряемой величины $\varphi(x, z)$ совпадает с некоторой функцией штрафов, зависящей только от $z - x$; обозначим эту функцию $\varphi^{(x_0)}(x, z)$. Из предположения вытекает, что найдется такая пара значений измеряемой величины x_1 и x_2, что для любой неотрицательной функции $c(x)$

$$\varphi^{(x_1)}(x, z) \neq c(x)\varphi^{(x_2)}(x, z), \tag{23}$$

т. е. критерии, опирающиеся на функции $\varphi^{(x_1)}(x,z)$ и $\varphi^{(x_2)}(x,z)$, неэквивалентны. Из неэквивалентности этих критериев следует существование пары приборов Π_1 и Π_2 такой, что

$$\Pi_1 \overset{G^{(x_1)}}{>} \Pi_2; \quad \Pi_2 \overset{G^{(x_2)}}{>} \Pi_1, \tag{24}$$

причем ввиду универсальности $G^{(x_1)}$ и $G^{(x_2)}$ (24) выполняется для любого распределения $f(x)$. Теперь легко убедиться, что на распреде-

Содержательный смысл последнего результата в [illegible] луч-упорядочение приборов из класса Н по любому универсальному критерию в точности совпадает с упорядочением по некоторому критерию, основанному на функции штрафов, зависящей только от $z-x$ (т. е. имеющему чисто метрологический характер).

В настоящей статье изучены некоторые свойства критериев сравнения и «взаимоотношения» между ними в предположении, что критерии принадлежат достаточно общему классу. В связи с результатами, полученными в работе, возникает ряд вопросов, представляющих, на наш взгляд, определенный интерес. В частности, можно отметить задачу выяснения условий, которым должно удовлетворять множество возможных распределений измеряемой величины и ограничений на класс приборов, чтобы существовал критерий, универсальный для этого класса на данном множестве распределений.

В заключение автор выражает благодарность д-ру техн. наук М. П. Цапенко, обратившему его внимание на вопросы, рассмотренные в статье, а также канд. техн. наук В. И. Рабиновичу за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ф. Маликов. Основы метрологии. М., Изд-во Комитета по делам мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР, 1949.
2. Л. С. Гуткин. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.

Поступила в редакцию
20 января 1967 г.