АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

В. М. ЕФИМОВ
(*Новосибирск*)

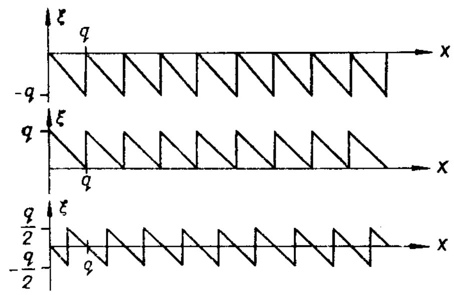
ОШИБКИ КВАНТОВАНИЯ ПО УРОВНЮ ПРИ ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Измерения, как правило, сопровождаются операцией квантования по уровню, сущность которой сводится к округлению значения измеряемой величины до какого-либо (обычно ближайшего) значения образцовой величины. В цифровом приборе эта операция осуществляется в процессе уравновешивания автоматически. При снятии показаний со стрелочных приборов или при расшифровке графических записей квантование по уровню осуществляется человеком. Округление значения измеряемой величины приводит к появлению специфической погрешности измерения — ошибки квантования по уровню (шума квантования по уровню, ошибки округления). В ряде случаев (например, в цифровом приборе) эта погрешность является одной из основных составляющих суммарной погрешности. Поэтому изучение свойств ошибки округления представляет несомненный интерес, и этому вопросу посвящено немалое количество исследований (например, [1—10]).

Вопросы, связанные с изучением свойств ошибок квантования, можно условно разделить на две группы: анализ статических статистических характеристик ошибки квантования и анализ динамических статистических характеристик ошибки квантования. Ниже рассматриваются статические характеристики ошибки квантования и погрешности цифрового измерения при равномерном квантовании по шкале прибора. Основное внимание уделяется анализу характеристик погрешности цифрового измерения при наличии погрешности на входе квантующего устройства, а также оценке влияния операции квантования по уровню на результат одной из процедур статистической обработки цифровых измерений, так как именно эти вопросы не получили достаточно полного решения.

ОШИБКА КВАНТОВАНИЯ И ПОГРЕШНОСТЬ ЦИФРОВОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Рассмотрим вначале случай, когда погрешность на входе квантующего устройства отсутствует. Ошибка квантования ξ возникает в связи с округлением значения измеряемой величины x до значения образцовой величины и определяется этими значениями. На практике в основном используются три способа округления: до нижней границы интервала квантования, до верхней границы интервала квантования и до середины интервала квантования. Зависимости ошибки квантования от значения измеряемой, величины x, соответствующие перечисленным способам округления, показаны на рисунке. При этом предполагается, что область возможных значений измеряемой величины укладывается полностью в диапазон прибора, и так называемые «краевые» эффекты, связанные с ограничением измеряемой величины краями диапазона, не возникают.



Наиболее целесообразным является третий способ округления, так как при его использовании максимальное значение ошибки квантования уменьшается вдвое по сравнению с другими способами. Из рисунка следует, что вычитанием или добавлением половины шага квантования по уровню и сдвигом по оси абсцисс на эту же величину две первые зависимости приводятся к последней, которая и будет рассматриваться в дальнейшем, так как от статистических характеристик ошибки квантования при третьем способе округления можно перейти к соответствующим характеристикам при первых двух способах.

Ошибка квантования ξ связана однозначной функциональной зависимостью со значением измеряемой величины

$$\xi = iq - x \quad (iq - 0{,}5q < x \leqslant iq + 0{,}5q), \tag{1а}$$

где i — номер интервала квантования; q — шаг квантования по уровню.

Соотношение (1а) определяет ошибку квантования как аддитивную и зависимую от x погрешность, добавление которой к измеряемой величине дает значение величины $x_к$ на выходе квантующего устройства:

$$x_к = x + \xi. \tag{2а}$$

Перейдем далее к случаю, когда на входе квантующего устройства действует аддитивная и не зависимая от x погрешность y. Будем, как и прежде, полагать, что область возможных значений суммы $x+y$ лежит в пределах диапазона прибора. Ошибка квантования в этом случае может быть определена по аналогии с (1 а) как аддитивная по отношению к сумме $x+y$ и зависящая от этой суммы и входящих в нее слагаемых погрешность:

$$\xi = iq - x - y \quad (iq - 0{,}5q < x + y \leqslant iq + 0{,}5q). \tag{1б}$$

Значение величины на выходе квантующего устройства, исходя из (1 б), запишем следующим образом:

$$x_к = x + y + \xi. \tag{2б}$$

На основании (2 а) и (2 б) можно выписать соотношение для погрешности цифрового измерения ε, под которой понимается разность между величиной на выходе прибора $x_к$ и измеряемой величиной x. При отсутствии погрешности y на входе квантующего устройства погрешность ε совпадает с ошибкой квантования ξ:

$$\varepsilon = x_к - x = \xi. \tag{3а}$$

При наличии погрешности y погрешность ε определяется суммой

$$\varepsilon = x_{\text{к}} - x = y + \xi. \tag{3б}$$

Между значениями ξ, входящими в (3а) и (3б), в соответствии с (1а) и (1б) имеется различие. Сделанные выше предположения относительно плотностей вероятности величин x и $x+y$ позволяют представить ошибку квантования в виде ряда Фурье. В первом случае, т. е. при отсутствии погрешности y,

$$\xi = \frac{q}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin 2\pi k \frac{x}{q}. \tag{4а}$$

При наличии погрешности y значение x в формуле (4а) следует заменить $x+y$:

$$\xi = \frac{q}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin 2\pi k \frac{x+y}{q}. \tag{4б}$$

Разложение (4а) и (4б) оказываются весьма эффективными при вычислении статистических характеристик ошибок квантования и погрешности цифрового измерения [4, 5, 7, 8].

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОШИБКИ КВАНТОВАНИЯ ПО УРОВНЮ

Ниже рассматриваются статистические характеристики ошибки квантования по уровню при отсутствии погрешности y на входе квантующего устройства. Как отмечалось выше, в этом случае ошибка квантования совпадает с погрешностью цифрового измерения.

Плотность вероятности (п. в.) ошибки квантования определяется на основании зависимости (1а) и п. в. измеряемой величины $\widetilde{f}(x)$ и имеет следующий вид [1, 3, 6]:

$$\widetilde{\psi}(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(iq - \xi) \quad (-0{,}5q \leqslant \xi \leqslant 0{,}5q). \tag{5а}$$

Следует отметить, что (5а) описывает безусловную п. в. ошибки квантования. При фиксированном значении результата измерения $x_{\text{к}} = iq$ условная п. в. ошибки квантования имеет иной вид:

$$\widetilde{\psi}(\xi / x_{\text{к}} = iq) = \frac{\widetilde{f}(iq - \xi)}{P_i} (-0{,}5q \leqslant \xi \leqslant 0{,}5q),$$

где $P_i = \int\limits_{iq-0{,}5q}^{iq+0{,}5q} \widetilde{f}(x) dx$ — вероятность появления результата измерения $x_{\text{к}} = iq$. Безусловная п. в. ошибки квантования является результатом осреднения условной п. в. по всем возможным значениям выходной величины:

$$\widetilde{\psi}(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} P_i \, \widetilde{\psi}(\xi / x_к = iq).$$

Характеристическая функция (х. ф.) ошибки квантования оказывается весьма удобной как для анализа свойств п. в. $\widetilde{\psi}(\xi)$, так и для вычисления моментов ошибки квантования. Формула для х. ф. ошибки квантования имеет следующую запись (см. [9, 10] и приложение):

$$\psi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2\pi}{q} k\right) \frac{\sin 0{,}5q\left(t + \frac{2\pi}{q} k\right)}{0{,}5q\left(t + \frac{2\pi}{q} k\right)}, \tag{6a}$$

где $f\left(\frac{2\pi}{q} k\right)$ — значение х. ф. измеряемой величины при $t = \frac{2\pi}{q} k$.

В [9, 10] сформулировано условие, при выполнении которого п. в. ошибки квантования строго равномерна. Это условие заключается в том, что равномерность п. в. ошибки квантования соблюдается для таких распределений x, у которых х. ф. $f(t)$ равна нулю при $|t| \geqslant \frac{2\pi}{q}$.

В этом случае формула (6 а) принимает вид

$$\psi(t) = \frac{\sin 0{,}5qt}{0{,}5qt}, \tag{7a}$$

так как $f(t=0)=1$. Выражение же (7 а) является х. ф. равномерно распределенной величины $\xi(-0{,}5q \leqslant \xi \leqslant 0{,}5q)$.

Следует оговориться, что условие $f(t) = 0\left(|t| \geqslant \frac{2\pi}{q}\right)$ выполняется для весьма узкого класса распределений, так как не всякая финитная функция, удовлетворяющая этому условию, может быть х. ф. [она должна отвечать условию неотрицательности п. в. $\widetilde{f}(x)$]. Более интересной представляется иная трактовка условия равномерности п. в. ошибки квантования, а именно: если

$$f\left(\frac{2\pi}{q} k\right) = 0 \quad (k \neq 0), \tag{8a}$$

то п. в. ошибки квантования равномерна. В этом случае х. ф. ошибки квантования также совпадает с х. ф. (7 а) равномерно распределенной величины. Условие (8 а) выполняется, например, для кусочно-постоянной п. в. $\widetilde{f}(x)$, если все интервалы ее постоянства кратны целому числу интервалов квантования. При этом не обязательно, чтобы границы интервалов постоянства совпадали с границами интервалов квантования. Частным случаем такого распределения является равномерное распределение величины в пределах целого числа m интервалов квантования. Для такого распределения характеристическая функция обращается в нуль при $t = \frac{2\pi}{q} k$ $(k \neq 0)$. Базируясь на этом примере, можно сделать интересное замечание. Из свойств х. ф. известно, что х. ф. суммы независимых случайных величин равна произведению их х. ф. Поэтому если п. в. измеряемой величины можно представить как п. в.

При невыполнении условия (8 а) п. в. ошибки квантования отличается от равномерной. Однако это отличие невелико, если $f\left(\frac{2\pi}{q}k\right) \ll 1$.

Последнее условие выполняется при быстром относительном затухании х. ф. измеряемой величины. Здесь полезно провести качественную аналогию с соотношениями, имеющими место в теории случайных процессов. Спектральная плотность случайного процесса и его корреляционная функция так же, как и плотность вероятности и характеристическая функция, связаны парой преобразования Фурье. Известно, что чем «шире» спектральная плотность процесса, тем быстрее затухают в этом процессе корреляционные связи. Аналогичное соотношение наблюдается между «шириной» п. в. и скоростью затухания х. ф. Некоторым показателем ширины п. в. может служить дисперсия измеряемой величины, которая совпадает по величине с модулем второй производной х. ф. центрированной величины при нулевом значении аргумента. Чем больше дисперсия, тем больше вторая производная х. ф. в нуле и тем быстрее затухает х. ф. Поэтому отношение среднеквадратического отклонения измеряемой величины к интервалу квантования по уровню может служить характеристической равномерности п. в. ошибки квантования. Чем больше это отношение, тем более близка к равномерной п. в. В [1], например, показано, что при достаточно слабых ограничениях на п. в. измеряемой величины (непрерывность и убывание со скоростью не меньшей, чем $\frac{1}{|x|}$ при больших значениях x) п. в. ошибки квантования стремится к равномерной при возрастании среднеквадратического отклонения квантуемой величины.

Моменты ошибки квантования могут быть определены по известной формуле, связывающей их с производными х. ф. $\psi(t)$ при нулевом значении аргумента, а также на основании (4 а) [4, 5]. Формулы для математического ожидания ошибки квантования $\bar{\xi}$, ее среднего квадрата $\overline{\xi^2}$ и второго смешанного момента $\overline{\xi x}$ ошибки с измеряемой величиной сведены в табл. 1. В третьем столбце таблицы даны формулы для этих характеристик при симметричной относительно математического ожидания $\bar{x}$ п. в. измеряемой величины $(\widetilde{f}(x-\bar{x}) = \widetilde{f}(-x+\bar{x}))$. В табл. 1 использованы следующие обозначения: $f_0\left(\frac{2\pi}{q}k\right)$ — х. ф. центрированной измеряемой величины; $f^{(1)}\left(\frac{2\pi}{q}k\right)$ — значение производной х. ф.

Таблица 1

$\bar{\xi}$	$\frac{q}{2\pi j}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{(-1)^k}{k}f\left(\frac{2\pi}{q}k\right)$	$\frac{q}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{K}\sin 2\pi k\frac{\alpha}{q}f_0\left(\frac{2\pi}{q}k\right)$
$\overline{\xi^2}$	$\frac{q^2}{12}+\frac{q^2}{2\pi^2}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{(-1)^k}{k^2}f\left(\frac{2\pi}{q}k\right)$	$\frac{q^2}{12}+\frac{q^2}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos 2\pi k\frac{\alpha}{q}f_0\left(\frac{2\pi}{q}k\right)$
$\overline{\xi x}$	$-\frac{q}{2\pi}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{(-1)^k}{k}f^{(1)}\left(\frac{2\pi}{q}k\right)$	$\bar{x}\bar{\xi}-\frac{q}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cos 2\pi k\frac{\alpha}{q}f_0^{(1)}\left(\frac{2\pi}{q}k\right)$

при $t = \frac{2\pi}{q}k$; α — ошибка квантования величины, равной математическому ожиданию $\bar{x}$. Из данных табл. 1 следует, что при $\alpha=0$ и $\alpha=0{,}5q$, т. е. при совпадении значения $\bar{x}$ с серединой или границами интервала квантования, математическое ожидание ошибки квантования равно $\bar{\xi}=0$.

Вычисление моментов ошибки квантования по формулам, приведенным в табл. 1, обычно осуществить достаточно просто. В случае оценки точности одиночного измерения при достаточно малой величине шага квантования по уровню по сравнению со среднеквадратическим отклонением измеряемой величины можно считать, что математическое ожидание ошибки квантования равно нулю, а средний квадрат ошибки квантования составляет $\overline{\xi^2} = \frac{q^2}{12}$.

В отличие от этих характеристик второй смешанный момент $\overline{\xi x}$ ошибки кватования и измеряемой величины существенно зависит от закона распределения измеряемой величины. Отметим, что для всех перечисленных выше моментов существуют оценки, связанные с дифференцируемостью и скоростью убывания п. в. измеряемой величины [2, 3, 6].

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОГРЕШНОСТИ ЦИФРОВОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Рассмотрим статистические характеристики погрешности цифрового измерения (3 б) при действии на входе квантующего устройства аддитивной по отношению к измеряемой величине и не зависимой от нее погрешности y.

Плотность вероятности погрешности измерения ε в этом случае имеет следующий вид:

$$\tilde{\psi}(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon - 0{,}5q}^{\varepsilon + 0{,}5q} \tilde{\varphi}(y)dy \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(iq - \varepsilon), \qquad (5б)$$

где $\tilde{\varphi}(y)$ — п. в. погрешности y. Формулу (5 б) можно получить, исходя из условной п. в. измеряемой величины при фиксированном результате измерения $x_к = iq$

$$\tilde{\psi}(x/x_к = iq) = \frac{\tilde{f}(x)}{p_i} \int\limits_{iq - 0{,}5q - x}^{iq + 0{,}5q - x} \tilde{\varphi}(y)dy; \quad p_i = \int \tilde{f}(x)dx \int\limits_{iq - 0{,}5q - x}^{iq + 0{,}5q - x} \tilde{\varphi}(y)\,dy$$

после подстановки $x=iq-\varepsilon$ и осреднения получающейся при этом условной п. в. погрешности измерения с вероятностями p_i по всем возможным результатам измерения. Заметим, что (5а) вытекает из (5б) при $\tilde{\varphi}(y)=\delta(y)$, где $\delta(y)$ — дельта-функция.

Характеристическая функция погрешности измерения имеет следующий вид (см. приложение):

$$\psi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2\pi}{q}k\right)\varphi\left(t + \frac{2\pi}{q}k\right) \frac{\sin 0{,}5\,q\left(t + \frac{2\pi}{q}k\right)}{0{,}5q\left(t + \frac{2\pi}{q}k\right)}, \qquad (6б)$$

где $\varphi\left(t + \frac{2\pi}{q}k\right)$ — х. ф. погрешности y.

Рассмотрим более внимательно формулу (6б). Допустим, что выполняется условие (8а). Тогда х. ф. погрешности измерения можно описать следующим образом:

$$\psi(t) = \varphi(t)\frac{\sin 0{,}5\,qt}{0{,}5\,qt}\ . \tag{7б}$$

Характеристическая функция ошибки измерения оказывается равной произведению х. ф. двух величин: погрешности на входе квантующего устройства и величины, равномерно распределенной в пределах интервала квантования. Следовательно, на основании свойства х. ф. суммы двух независимых случайных величин ошибку измерения можно рассматривать как композицию двух независимых ошибок, одна из которых совпадает с ошибкой на входе квантующего устройства, а вторая равномерно распределена в пределах интервала квантования. При этом операция квантования по уровню оказывается (в среднем по шкале прибора) эквивалентной добавлению равномерно распределенной в пределах интервала квантования погрешности.

Если условие (8а) не выполняется, но х. ф. измеряемой величины убывает достаточно быстро, то формулой (7б) можно пользоваться как весьма точным приближением х. ф. погрешности измерения. Формула (6б) легко обобщается для случая, когда на входе квантующего устройства действует композиция независимых погрешностей.

Моменты погрешности измерения определяются путем вычисления производных от (6б) при $t=0$ и использования (4б). С другой стороны, так как на основании (3б) погрешность ε равна сумме погрешности y и ошибки квантования ξ, то для вычисления ее двух первых моментов достаточно определения соответствующих моментов ошибки квантования и второго смешанного момента $\overline{\xi y}$ между погрешностью y и ошибкой квантования. Формулы же для характеристик ошибки квантования могут быть выписаны по аналогии с формулами табл. 1, так как отличие ошибки квантования для рассматриваемого случая по сравнению с предыдущим заключается лишь в том, что на входе квантующего устройства действует сумма двух независимых величин x и y. Формулы сведены в табл. 2, третий столбец которой соответствует симметричным относительно своих математических ожиданий $\bar{x}$ и $\bar{y}$ п. в. $\widetilde{f}(x)$ и $\widetilde{\varphi}(y)$. В отличие

Таблица 2

$\bar{\xi}$	$\dfrac{q}{2\pi j}\sum\limits_{k\neq 0}\dfrac{(-1)^k}{k}\varphi\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)f\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)$	$\dfrac{q}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}\sin 2\pi k\dfrac{\alpha}{q}\,\varphi_0\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)f_0\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)$
$\overline{\xi^2}$	$\dfrac{q^2}{12}+\dfrac{q^2}{2\pi^2}\sum\limits_{k\neq 0}\dfrac{(-1)^k}{k^2}\varphi\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)f\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)$	$\dfrac{q^2}{12}+\dfrac{q^2}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}\varphi_0\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)f_0\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)$
$\overline{\xi y}$	$-\dfrac{q}{2\pi}\sum\limits_{k\neq 0}\dfrac{(-1)^k}{k}\varphi^{(1)}\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)f\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)$	$\bar{y}\bar{\xi}-\dfrac{q}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}\cos 2\pi k\dfrac{\alpha}{q}\,\varphi_0^{(1)}\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)f_0\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)$
$\overline{\xi x}$	$-\dfrac{q}{2\pi}\sum\limits_{k\neq 0}\dfrac{(-1)^k}{k}\varphi\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)f^{(1)}\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)$	$\bar{x}\bar{\xi}-\dfrac{q}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}\cos 2\pi k\dfrac{\alpha}{q}\,\varphi_0\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)f_0^{(1)}\left(\dfrac{2\pi}{q}k\right)$

от табл. 1 α означает ошибку квантования величины, равной сумме математических ожиданий $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

На основании (3б) два первых момента погрешности измерения ε определяются соотношениями:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{y} + \bar{\xi}; \quad \overline{\varepsilon^2} = \overline{y^2} + 2\,\overline{\xi y} + \overline{\xi^2}. \tag{9}$$

Как следует из данных табл. 2, если выполняется условие (8а), то $\bar{\xi}=0$, $\overline{\xi y} = 0$, $\overline{\xi^2} = \frac{q^2}{12}$. При этом математическое ожидание погрешности измерения совпадает с математическим ожиданием погрешности y, а $\overline{\varepsilon^2} = \overline{y^2} + \frac{q^2}{12}$. Если условие, аналогичное (8а), выполняется для х. ф. погрешности y, то $\bar{\xi} = 0$, $\overline{\xi x} = 0$, $\overline{\xi^2} = \frac{q^2}{12}$. В этом случае $\bar{\varepsilon}=\bar{y}$, а второй смешанный момент центрированных значений измеряемой величины и погрешности измерения ε оказывается равным нулю.

ВЛИЯНИЕ ОПЕРАЦИИ КВАНТОВАНИЯ ПО УРОВНЮ НА РЕЗУЛЬТАТ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Ниже будет рассмотрено уточнение результата измерения при наличии погрешности на входе квантующего устройства путем использования операции осреднения:

$$x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

где $x_i = x + y_i$ — результат i-го измерения. Известно, что такая процедура позволяет уменьшить влияние случайной составляющей погрешности на результат измерения, так как с ростом числа измерений средний квадрат разности между истинным значением измеряемой величины x и оценкой x^* уменьшается. Если измеряемая величина постоянна в этих n измерениях, а значения погрешности y_i независимы, то

$$\overline{\varepsilon_n^2} = \overline{[x - x^*]^2} = (\bar{y})^2 + \frac{\overline{\mathring{y}^2}}{n},$$

где $\overline{\mathring{y}^2}$ — дисперсия погрешности y.

При $\bar{y}=0$, используя оценку x^* и увеличивая число измерений, можно добиться желаемой степени уточнения значения измеряемой величины. Иначе обстоит дело при наличии операции квантования по уровню и использовании аналогичной оценки

$$x_{\text{к}}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{\text{к}i}, \tag{10}$$

где

$$x_{\text{к}i} = x + \varepsilon_i.$$

Квантование по уровню в общем случае делает оценку $x_к^*$, смещенной даже при нулевом среднем ошибки на входе квантующего устройства.

Для определения влияния квантования по уровню вычислим квадрат разности между истинным значением x и оценкой $x_к^*$, средний по всем возможным значениям измеряемой величины, полагая ее постоянной в данной серии n измерений и меняющейся от серии к серии с плотностью вероятности $\bar{f}(x)$. Значения погрешности y будем при этом считать не зависимыми от измеряемой величины и между собой и одинаково распределенными. Средний квадрат ошибки равен

$$\overline{\varepsilon_n^2} = \overline{\left[x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x+\varepsilon_i)\right]^2} = \frac{1}{n^2}\overline{\left[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right]^2}.$$

Центрируя погрешность измерения ε_i, эту формулу можно привести к виду

$$\overline{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{n}\left[\overline{\varepsilon^2} - (\bar{\varepsilon})^2\right] + (\bar{\varepsilon})^2 + \frac{n-1}{n}\left[\overline{\xi\xi} - (\bar{\xi})^2\right]. \tag{11}$$

В этом соотношении величины $\bar{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon^2}$ и $\bar{\xi}$ определяются формулой (9) и данными табл. 2. Единственной ранее не определенной величиной является $\overline{\xi\xi}$ — второй смешанный момент между ошибками квантования различных измерений. Эту величину можно вычислить, используя (4б) и представляя синусы, входящие в (4б), формулой Эйлера:

$$\overline{\xi\xi} = -\frac{q^2}{4\pi^2}\sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}}{kl}\left[f\left(\frac{2\pi}{q}(k+l)\right)\varphi\left(\frac{2\pi}{q}k\right)\varphi\left(\frac{2\pi}{q}l\right) + \right.$$
$$+ f\left(-\frac{2\pi}{q}(k+l)\right)\varphi\left(-\frac{2\pi}{q}k\right)\varphi\left(-\frac{2\pi}{q}l\right) - f\left(\frac{2\pi}{q}(k-l)\right)\times$$
$$\left.\times\varphi\left(\frac{2\pi}{q}k\right)\varphi\left(-\frac{2\pi}{q}l\right) - f\left(-\frac{2\pi}{q}(k-l)\right)\varphi\left(-\frac{2\pi}{q}k\right)\varphi\left(\frac{2\pi}{q}l\right)\right]. \tag{12}$$

Заметим, что в (12) можно выделить слагаемое, не зависящее от значений х. ф. измеряемой величины. Оно образуется из части членов с одинаковыми индексами суммирования ($k=l$) и равно

$$\frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\varphi\left(\frac{2\pi}{q}k\right)\varphi\left(-\frac{2\pi}{q}k\right) = \frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left|\varphi\left(\frac{2\pi}{q}k\right)\right|^2. \tag{13}$$

Как следует из (11), средний квадрат $\overline{\varepsilon_n^2}$ состоит из трех слагаемых, первое из которых монотонно уменьшается с ростом n, второе не зависит от n, а третье с ростом n стремится к постоянной величине.

Рассмотрим частные случаи формулы (11). Пусть выполняется условие (8а). Тогда, как следует из предыдущего раздела, $\bar{\varepsilon} = \bar{y}$, а математическое ожидание ошибки квантования $\bar{\xi}$ равно нулю. В формуле (12) все слагаемые, за исключением (13), обращаются в нуль. С учетом этих замечаний, а также (9) и (13) выражение среднего квадрата погрешности оценки (10) примет вид [8]*

$$\overline{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{q^2}{12} + \overline{\overset{\circ}{y}{}^2}\right) + (\overline{y})^2 + \frac{n-1}{n}\,\frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left|\varphi\left(\frac{2\pi}{q}k\right)\right|^2. \qquad (14)$$

Как следует из (14), даже при $\overline{y}=0$ оценка (10) является в среднем смещенной и при возрастании n средний квадрат погрешности $\overline{\varepsilon_n^2}$ не стремится к нулю, а определяется третьим слагаемым (14), значение которого зависит от свойств х. ф. погрешности y. Таким образом, в поведении оценки $\overset{*}{x}_к$ с ростом числа измерений наблюдается качественное отличие по сравнению с оценкой x^*, т. е. случаем отсутствия операции квантования по уровню.

Пусть теперь $\varphi\left(\frac{2\pi}{q}k\right) = 0$ $(k \neq 0)\cdot$ Тогда математическое ожидание ошибки квантования равно нулю, $\overline{\xi\xi}=0$ и

$$\overline{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{q^2}{12} + \overline{\overset{\circ}{y}{}^2} - \frac{q}{\pi}\sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^k}{k}\varphi^{(1)}\left(\frac{2\pi}{q}k\right)f\left(\frac{2\pi}{q}k\right)\right) + (\overline{y})^2. \qquad (15)$$

В этом случае оценка (10) при $\overline{y}=0$ оказывается несмещенной** и ведет себя аналогично оценке x^*.

И наконец, если условие (8а) выполняется одновременно для х. ф. измеряемой величины и погрешности y, то

$$\overline{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{q^2}{12} + \overline{\overset{\circ}{y}{}^2}\right) + (\overline{y})^2. \qquad (16)$$

Как следует из изложенного, поведение оценки (10) с ростом числа измерений зависит от свойств распределений как измеряемой величины x, так и погрешности y. Однако х. ф. измеряемой величины затухает значительно быстрее х. ф. погрешности y, так как обычно выполняется условие $\overline{\overset{\circ}{x}{}^2} \gg \overline{\overset{\circ}{y}{}^2}$. При этом формула (14) достаточно точно описывает поведение среднего квадрата погрешности $\overline{\varepsilon_n^2}$. Поэтому можно считать, что поведение $\overline{\varepsilon_n^2}$ в основном определяется свойствами х. ф. погрешности на входе квантующего устройства.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Характеристическая функция ошибки квантования. По определению,

$$\psi(t) = \int_{-0,5q}^{0,5q}\exp[jt\xi]\left[\sum_{-\infty}^{\infty}\widetilde{f}(iq-\xi)\right]d\xi, \qquad (1П)$$

---

* В [8] формула (14) получена в предположении, что п. в. измеряемой величины постоянна в пределах интервала квантования, что равносильно выполнению условия (8а) или случаю быстрого затухания х. ф. измеряемой величины.

** Формула (15) при $\varphi(t) = \frac{\sin 0,5qt}{0,5qt}$ получена в [7].

С другой стороны,

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(iq-\xi)=\int\tilde{f}(x)\left[\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(x-iq+\xi)\right]dx. \quad (2П)$$

Сумма дельта-функций в (2П) эквивалентна ряду

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(x-iq+\xi)=\frac{1}{q}\sum_{-\infty}^{\infty}\exp\left[j\frac{2\pi}{q}i(x+\xi)\right]. \quad (3П)$$

Подставляя (3П) в (2П), а затем полученный результат в (1П) и учитывая, что

$$\int\exp\left[j\frac{2\pi}{q}ix\right]\tilde{f}(x)\,dx=f\left(\frac{2\pi}{q}i\right),$$

$$\int_{-0,5q}^{0,5q}\exp\left[j\left(t+\frac{2\pi}{q}i\right)\xi\right]d\xi=2\frac{\sin 0,5q\left(t+\frac{2\pi}{q}i\right)}{t+\frac{2\pi}{q}i},$$

получим формулу (6а).

Характеристическая функция погрешности измерения. По определению,

$$\psi(t)=\int\exp[jt\varepsilon]\left[\int_{\varepsilon-0,5q}^{\varepsilon+0,5q}\tilde{\varphi}(y)\,dy\sum_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(iq-\varepsilon)\right]d\varepsilon. \quad (4П)$$

На основании (2П) и (3П)

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(iq-\varepsilon)=\frac{1}{q}\sum_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{2\pi}{q}i\right)\exp\left[j\frac{2\pi}{q}\varepsilon\right]. \quad (5П)$$

Внутренний интеграл в (4П) после замены

$$\tilde{\varphi}(y)=\frac{1}{2\pi}\int\exp[-jt_1y]\,\varphi(t_1)\,dt_1$$

приводится к виду

$$\int_{\varepsilon-0,5q}^{\varepsilon+0,5q}\tilde{\varphi}(y)dy=\frac{1}{\pi}\int\varphi(t_1)\frac{\sin 0,5qt_1}{t_1}\exp[-jt_1\varepsilon]\,dt_1. \quad (6П)$$

Подставляя (6П) и (5П) в (4П), меняя порядок интегрирования и учитывая, что

$$\int\exp\left[j\left(t-t_1+\frac{2\pi}{q}i\right)\varepsilon\right]d\varepsilon=2\pi\delta\left(t-t_1+\frac{2\pi}{q}i\right),$$

после интегрирования по t_1 получим формулу (6б).

Если величины x и y зависимы, то в (6б) войдут значения двумерной х. ф. при тех же значениях аргументов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на базе аппарата характеристических функций проведен анализ статистических характеристик погрешности цифрового измерения при наличии аддитивной и независимой погрешности на входе независимых величин: погрешности с равномерным распределением в пределах шага квантования и погрешности на входе квантующего устройства. Вычислен средний по шкале прибора квадрат смещения результата одного из способов статистической обработки цифровых измерений и рассмотрено влияние на его величину статистических свойств измеряемой величины и погрешности на входе квантующего устройства.

ЛИТЕРАТУР

1. П. А. Козуляев. О распределении дробной части случайной величины.— Математический сборник, новая серия, 1937, т. 2(44), вып. 5.
2. А. Л. Лурье. Уменьшение ошибки округления при увеличении числа измерений.— Прикладная математика и механика, 1947, т. XI, вып. 4.
3. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). М., Гостехиздат, 1955.
4. А. А. Косякин. Статистическая теория квантования по уровню.— Автоматика и телемеханика, 1961, № 6.
5. А. С. Немировский. Вероятностные методы в измерительной технике. М., Стандартгиз, 1964.
6. Н. А. Бодин. Об ошибках округления при многомерных измерениях.— Труды математического института имени В. А. Стеклова, т. 79. М., «Наука», 1965.
7. М. Л. Езерский, А. М. Куперман. О выборе шага квантования по уровню и по времени при цифровом осреднении.— Автометрия, 1967, № 4.
8. В. М. Ефимов. Влияние квантования по уровню на результат статистической обработки измерений.— В сб. «Проблемы электрометрии». Новосибирск, «Наука», 1967.
9. B. Widrow. A Study of Rough Amplitude Quantizations bu Means of Nyguist Sampling Theory.— IRE Trans. on Circuit Theory, 1956, v. CT—3, № 4.
10. B. Widrow. Statistical Analysis of Amplitude-Quantized Sampling-Data Systems.— Application and Industry, 1961, № 52.

Поступила в редакцию
5 апреля 1967 г.