АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1967

ЭЛЕКТРОИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И УСТРОЙСТВА

УДК 62—505

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, А. А. НЕСТЕРОВ
(Новосибирск)

ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК АНАЛОГОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

Непрерывное развитие техники ставит задачу совершенствования измерительных устройств и, в частности, увеличения их быстродействия. Все существующие методы увеличения быстродействия можно разбить на две большие группы. К первой можно отнести методы, сводящиеся к замене инерционных устройств более быстродействующими [1]. При этом в случае наилучшей настройки до и после замены инерционного устройства сам характер переходного процесса изменяется весьма незначительно и происходит как бы изменение только масштаба по оси времени. Этот путь дает весьма хорошие результаты, но, по сути дела, означает замену одного прибора другим. Ко второй группе можно отнести методы, основанные на изменении самого характера процесса установления показаний и осуществляемые за счет линейной [2—4] и нелинейной [5—7] коррекции. При линейной коррекции возникает необходимость в компромиссном решении при обеспечении высокой статической точности и высокого быстродействия. Применение нелинейной коррекции дает лучшие результаты. Естественно, возникает задача поиска наилучшей, т. е. оптимальной в некотором смысле и при заданных ограничениях, нелинейной коррекции. Задача поиска оптимальной коррекции сводится к задаче формирования входного воздействия из измеряемого сигнала. Применение теории оптимальных процессов [8] позволяет однозначно указать форму входного воздействия, обеспечивающую максимальное быстродействие. Однако в общем случае задача синтеза оптимальных систем выше второго порядка наталкивается на значительные вычислительные трудности, так как она аналитически неразрешима [8]. Для измерительных систем, кроме этих вычислительных, имеем еще и принципиальные трудности. Дело в том, что синтез осуществляется в функции фазовых координат, которые предполагаются известными. В измерительных системах измеряемая величина образует одну из n фазовых координат и принципиально неизвестна. Таким образом, чтобы сформировать оптимальное входное воздействие, необходимо знать значение самой измеряемой величины и измерять еще $(n-1)$ других величин (фазовые координаты). Все эти трудности можно обойти для одного частного случая измерений — измерений кусочно-постоянных величин.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем считать, что на входе аналогового измерительного прибора находится устройство, преобразующее кусочно-постоянную измеряемую величину в некоторое воздействие $u(t)$, поступающее теперь непосредственно на вход измерительного устройства. Назовем это воздействие $u(t)$ в соответствии с теорией оптимальных процессов управляющим. В отличие от принятого в теории оптимальных процессов ограничения управляющего воздействия по модулю некоторой постоянной величиной введем новый класс переменных ограничений. Будем считать, что управляющее воздействие $u(t)$ ограничено приращениями Δz кусочно-постоянной измеряемой величины $z(t)$ по условию

$$|u| \leqslant N|\Delta z|, \tag{1}$$

где N — некоторый коэффициент усиления приращения. Рассмотрим измерительную систему, описываемую в векторной форме дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dX}{dt} = AX + Bu; \quad |u| \leqslant N|\Delta z|, \tag{2}$$

где A и B — матрицы размерностей $n\times n$ и $n\times 1$ соответственно;

X — вектор фазового состояния системы;

u — управляющее воздействие (скаляр).

Тогда задача оптимального по быстродействию измерения кусочно-постоянной величины $z(t)$ математически сводится к переводу за наименьшее время изображающей точки из начала координат фазового пространства в точки статического равновесия [9].

В данной работе ставится задача оценить выигрыш в увеличении быстродействия оптимальной системы по сравнению с обычной линейной системой с линейной коррекцией. Каждая из систем настраивается так, чтобы обеспечить минимально возможное время переходных процессов.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МИНИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Ограничив управляющее воздействие приращениями кусочно-постоянной измеряемой величины по условию (1), формируем оптимальное управляющее воздействие на основе принципа максимума [8]. Согласно формализму принципа максимума, находим функцию Гамильтона

$$H = (\Psi,\ AX) + (\Psi,\ Bu) \tag{3}$$

и сопряженную систему Ψ

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -A^*\Psi, \tag{4}$$

где A^* — транспонированная матрица A.

Функция H принимает максимальное значение, если управляющее воздействие удовлетворяет следующему условию:

$$u = N\Delta z \operatorname{sign} B^*\Psi, \tag{5}$$

где B^* — транспонированная матрица B.

Управляющее воздействие представляет последовательность разнополярных импульсов. При действительных собственных значениях матрицы A число переключений управляющего воздействия u не превышает $(n-1)$. Для комплексных собственных значений число переключений принципиально может превышать $(n-1)$. Это зависит от расположения граничных точек в фазовом пространстве. В нашем случае переход для системы (2) осуществляется каждый раз из начала координат $X(0)=0$ в точки статического равновесия $X(T)=-A^{-1}B\Delta z$. Последние определяются величинами самих приращений. В силу такого специфического расположения в фазовом пространстве граничных точек число переключений управляющего воздействия для любых собственных значений матрицы A не превышает $(n-1)$ и всегда равно $(n-1)$. Это означает, что имеется n интервалов постоянства управляющего воздействия, на каждом из которых оно принимает одно из двух значений $u=\pm N\Delta z$, причем на первом интервале всегда $u=N\Delta z$. Припасовывая решения уравнения (2) в моменты переключения управления и выражая постоянные интегрирования через специфические граничные условия, получаем систему трансцендентных уравнений, связывающую моменты переключения (t_k) управляющего воздействия с корнями (λ_j) характеристического уравнения системы (2):

$$e^{\lambda_j \sum_{k=1}^{n} t_k} + 2\sum_{\mu=1}^{n-1} e^{\lambda_j \sum_{k=\mu+1}^{n} t_k}(-1)^{n-\mu} = \begin{cases} \dfrac{-N+1}{N} & \text{при } n=2,\ 4,\ 6,\dots \\ \dfrac{N-1}{N} & \text{при } n=3,\ 5,\ 7,\dots \end{cases} \tag{6}$$

$$j=1,\ 2,\dots,n.$$

При выводе (6) делаются предположения, что корни λ_j различны и ненулевые и длительность каждого интервала постоянства измеряемой величины не меньше длительности оптимального переходного процесса T. Отсчет времени на каждом интервале постоянства управляющего воздействия ведется от нуля, так что время оптимального переходного процесса составляет $T=\sum_{k=1}^{n} t_k$.

Из (6) непосредственно следует, что моменты переключения управляющего воздействия и длительность переходного процесса не зависят от величин приращений, а определяются лишь параметрами самой измерительной системы. В работе [10] на примере систем второго порядка было доказано, что наименьшее время переходного процесса достигается в случае равенства интервалов постоянства управления. Численные расчеты подтверждают правильность этого положения и для систем более высокого порядка. В этом случае (6) вырождается в систему алгебраических уравнений n-го порядка

$$\left(e^{\lambda_j \frac{T}{n}}\right)^n + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(e^{\lambda_j \frac{T}{n}}\right)^k(-1)^{n-k} = \begin{cases} \dfrac{-N+1}{N} & \text{при } n=2,\ 4,\ 6,\dots \\ \dfrac{N-1}{N} & \text{при } n=3,\ 5,\ 7,\dots \end{cases} \tag{7}$$

$j=1,\ 2,\ \dots,\ n.$

Система (7) совместно с уравнениями связи

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -a_{n-1},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j = a_{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad (8)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = (-1)^n a_0$$

между корнями и коэффициентами характеристического уравнения $\lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i = 0$ образуют систему порядка $2n$ с $(2n+1)$ неизвестными. Считая один из коэффициентов (a_0) заданным (иначе задача поиска минимально возможного времени не имеет физического смысла), находим минимально возможное время переходного процесса и значения коэффициентов характеристического уравнения, обеспечивающих это время. Для систем второго порядка ($n=2$) получаем:

$$T = \sqrt{\frac{\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{N}}\right)^2 + \ln^2\left(1 + \frac{1}{N}\right)}{a_0}}; \qquad (9)$$

$$a_1 = -2\sqrt{\frac{a_0 \ln^2\left(1 + \frac{1}{N}\right)}{\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{N}}\right)^2 + \ln^2\left(1 + \frac{1}{N}\right)}}. \qquad (10)$$

Для системы третьего порядка имеем следующие выражения для времени и коэффициентов:

$$T = -\frac{3\sqrt[3]{B}}{\sqrt[3]{a_0}}; \quad a_1 = \sqrt[3]{a_0^2}\,\frac{A}{\sqrt[3]{B^2}}; \quad a_2 = \sqrt[3]{a_0}\,\frac{C}{\sqrt[3]{B}}, \qquad (11)$$

где A, B, C зависят только от коэффициента N и выражаются следующим образом:

$$A = \ln\left\{\left[0{,}5(h+v) - \frac{2}{3}\right]^2 + 0{,}75(h-v)^2\right\}\ln\left(h + v + \frac{2}{3}\right) +$$

$$+ \ln^2\left\{\left[0{,}5(h+v) - \frac{2}{3}\right]^2 + 0{,}75(h-v)^2\right\}^{1/2} + \left(\operatorname{arctg}\frac{0{,}5\sqrt{3}(h-v)}{0{,}5(h+v) - \frac{2}{3}}\right)^2;$$

$$B = \left[\ln^2\left\{\left[0{,}5(h+v) - \frac{2}{3}\right]^2 + 0{,}75(h-v)^2\right\}^{1/2} +\right.$$

$$\left. + \left(\operatorname{arctg}\frac{0{,}5\sqrt{3}(h-v)}{0{,}5(h+v) - \frac{2}{3}}\right)^2\right]\ln\left(h + v + \frac{2}{3}\right);$$

$$h=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+\left(\frac{2}{9}\right)^3}};\qquad v=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+\left(\frac{2}{9}\right)^3}};$$

$$q=\frac{27-7N}{54N}.$$

Для систем более высокого порядка можно получить численные решения. Например, для системы четвертого порядка находим следующую приближенную (с погрешностью менее 5% при $N\gg 1$) зависимость:

$$T=\frac{3{,}5}{\sqrt[4]{a_0}\,(0{,}75\sqrt[4]{N}+0{,}25)}. \tag{12}$$

Анализ выражений (6)—(12) показывает, что для устойчивых систем, имеющих хотя бы один действительный корень (это всегда имеет место для систем нечетного порядка), переход в установившееся состояние за конечное время без предварительного усиления приращений невозможен. Полученные выше формулы позволяют оценить влияние предварительного усиления приращения в N раз на увеличение быстродействия. Можно считать, что быстродействие увеличивается примерно в $\sqrt[n]{N}$ раз. Это означает, что эффективность предварительного усиления снижается с увеличением порядка системы.

В связи с широким применением астатических систем представляет интерес оценка и их быстродействия. К системам такого рода относятся автоматические потенциометры, автоматические уравновешенные мосты и т. д. Линеаризованная разомкнутая система имеет один нулевой корень и описывается дифференциальным уравнением вида

$$x^n+\sum_{i=1}^{n-1}a_ix^{(i)}=bu;\quad |u|\leqslant N\,|\Delta z|\,. \tag{13}$$

Для возможности сравнения быстродействия статических и астатических систем рассмотрим переход в одну и ту же точку $x(T)=\frac{b\Delta z}{a_0}$, считая $bk_{\text{о.с}}=a_0$ (где $k_{\text{о.с}}$ — коэффициент обратной связи). Припасовывая решения для (13), выражаем постоянные интегрирования через те же граничные условия: $x^{(i)}(0)=x(0)=0$; $x^{(i)}(T)=0$; $x(T)=\frac{b\Delta z}{a_0}$; $i=1,2,\ldots,n$. Для системы второго порядка получаем, что минимально возможное время достигается в случае двух нулевых корней и определяется по формуле

$$T=\frac{2}{\sqrt{Na_0}}. \tag{14}$$

Для системы третьего порядка минимально возможное время равно

$$T=\sqrt[3]{\frac{3\pi^2}{Na_0}} \tag{15}$$

и достигается при следующих значениях коэффициентов:

$$a_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi N a_0}{3}\right)^2}; \quad a_2 = 0. \qquad (16)$$

Для обычных линейных систем с линейной коррекцией, строго говоря, время переходного процесса бесконечно. На практике, однако, нас интересует время вхождения в некоторую зону установившегося значения. Для систем автоматического управления эта зона принимается равной 5% от установившегося значения, для измерительных систем она может быть 1, 0,1, 0,01% и менее. Она определяется классом точности измерительного устройства. Минимально возможное время переходного процесса в этом случае достигается при настройке системы на почти-апериодический процесс и приближенно может быть определено [11] по формуле

$$T = \frac{m}{\sqrt[n]{a_0}}, \qquad (17)$$

где m — коэффициент, зависящий от величины зоны и порядка системы. Например, в случае 5% зоны для систем второго, третьего и четвертого порядка m равно 2,96; 4,4; 4,6 соответственно. Сравнивая значения времени по формуле (17) со значениями времени по формулам (9), (15), (12) при $N=1$, получаем, что быстродействие увеличивается соответственно в 1,72; 1,42; 1,31 раза. Для системы второго порядка класса точности 1; 0,1 и 0,01 время переходного процесса уменьшается уже соответственно в 2,68; 4,02; 5,26 раза. Таким образом, выигрыш от введения оптимального управления увеличивается с увеличением класса точности измерительного устройства. Приведенные цифры увеличения быстродействия справедливы при $N=1$. Использование предварительного усиления измеряемого сигнала в N раз приводит, как было показано выше, к дополнительному увеличению быстродействия приблизительно в $\sqrt[n]{N}$ раз. Известно, что стремление увеличить статическую точность измерительного устройства приводит к уменьшению запаса устойчивости и увеличению времени переходных процессов. Анализ корней характеристического уравнения для случая оптимального управления по приращениям показывает, что минимальное время достигается в случае неустойчивой исходной системы, имеющей комплексные корни с положительными действительными частями. Функция $T = f(\lambda_j)$ уменьшается с уменьшением запаса устойчивости и достигает минимума в области неустойчивости. Это означает, что увеличение статической точности ведет к уменьшению запаса устойчивости и одновременно — к уменьшению времени переходных процессов. Это свойство таких оптимальных систем является весьма важным для практики. На практике, однако, зачастую не удается добиться использованием линейной коррекции апериодичности переходных процессов. И выигрыш в увеличении быстродействия будет тем больше, чем ближе к границе устойчивости находится система. Так, например, для системы второго порядка, находящейся на границе устойчивости, время переходного процесса при введении оптимального управления определяется следующим образом. Полагая $\lambda_{1,2} = \pm j\beta$, исключаем из (6) неизвестную t_2. Получаем квадратное уравнение

$$2(e^{j\beta t_1})^2 - \left[5 - \left(\frac{N+1}{N}\right)^2\right] e^{j\beta t_1} + 2 = 0. \qquad (18)$$

Из (18) находим t_1 и, подставляя его в (6), определяем t_2. Суммируя t_1 и t_2, находим время переходного процесса для системы на границе устойчивости:

$$T = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\left(\arccos\frac{4N^2-4N-1}{4N^2} + \arccos\frac{4N^2+2N+1}{4N(N+1)}\right). \qquad (19)$$

Анализ (9) и (19) показывает, что при $N=1$ время переходного процесса для системы на границе устойчивости увеличивается по сравнению с минимально возможным примерно на 6%. Аналогичные результаты справедливы и для систем более высокого порядка. С ростом N оптимальная система приближается к границе устойчивости. Поэтому для устойчивых систем, находящихся вблизи границы устойчивости, полученные соотношения для времени переходных процессов являются верхними оценками потенциального быстродействия и могут использоваться в качестве первых приближений при определении точных значений. Оценивая возможный выигрыш в увеличении быстродействия, можно решить вопрос о целесообразности построения оптимальной системы. Принципиальная реализация обсуждаемого здесь алгоритма увеличения быстродействия описана в [9].

ВЫВОДЫ

Применение предлагаемого алгоритма, не ухудшая статической точности, позволяет уменьшать время переходных процессов и тем существеннее, чем меньше запас устойчивости и выше класс точности измерительного устройства.

Приведенные формулы дают возможность оценить потенциальное быстродействие линейных систем и могут служить первым приближением при определении точного значения времени переходных процессов. Одновременно формулы позволяют оценить увеличение быстродействия с ростом предварительного усиления приращений.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Kutzsche. Rationalisierung und Automatisierung von Meßvorgängen. 8 Internat. Kollog. Techn. Hochschule. Ilmenau, 1963, Teil 1.
2. Е. И. Баранчук, Е. Л. Коварская. Исследование устойчивости следящих систем автоматических контрольно-измерительных приборов и устройств.— Автоматический контроль и методы электрических измерений (Труды V конференции), т. II. Новосибирск, «Наука», 1966.
3. В. С. Пеллинец, В. В. Гаюн. Вопросы динамической коррекции при измерении нестандартных процессов.— Измерительная техника, 1966, № 1.
4. H. R. Chope, D. S. Wiper. The dynamic response of instruments for online measurements. Analys. Instrumentat.— 1963. Pittsburgh, Pa, Instrum. Soc. America, 1963.
5. E. Fischer. Fortschritte auf dem Gebiete der Präzisionsmesstechnik.— Microtechnik, 1965, Bd. 19, № 3.
6. М. В. Рыбашов. Некоторые вопросы динамической коррекции нелинейных датчиков.— Измерительная техника, 1965, № 6.
7. Ф. Ф. Котченко. Вопросы разработки быстродействующих следящих систем для автоматических компенсаторов.— Автоматический контроль и методы электрических измерений (Труды V конференции), т. II. Новосибирск, «Наука», 1966.

8. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
9. В. М. Александров, Б. Г. Матиенко, А. А. Нестеров. Уменьшение времени установления показаний для линейных измерительных систем n-го порядка.— Изв. СО АН СССР, серия техн. наук, 1964, вып. 1, № 2.
10. В. М. Александров. Выбор параметров измерительных систем при оптимальном управлении.— Автометрия, 1965, № 4.
11. А. М. Рубинчик. Приближенный метод оценки качества регулирования в линейных системах.— В сб. «Устройства и элементы теории автоматики и телемеханики». М., Машгиз, 1952.

*Поступила в редакцию
13 мая 1966 г.,
окончательный вариант —
21 апреля 1967 г.*